

Devoir de vacances

pour le 01/09/2026

Au moins une dizaine de jours avant la rentrée ; remettez-vous progressivement au travail en revoyant le cours de première année (soit des fiches réalisées en sup, soit à l'aide d'un livre dans le quel il y a une partie résumant « l'essentiel du cours » pour chaque chapitre.)

Ce devoir porte sur une grande partie du cours de première année. Soignez la rédaction et pensez à encadrer ou souligner vos résultats en rouge.

Bon courage !

Exercice 1

A - Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(1) \end{aligned}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Que peut-on dire de l'application φ ?
3. Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\text{Ker } \varphi$. Quelle est la dimension de $\text{Ker } \varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

B - Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note \mathcal{B}' la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

7. Justifier que la famille \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Écrire la matrice de passage Q de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
10. Écrire la matrice M de f dans la base \mathcal{B}' en donnant les calculs intermédiaires.
11. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n .
12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c .
13. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt$$

C - Une autre preuve du résultat précédent

14. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

15. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on pose

$$a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt.$$

- Déterminer a_1 et a_0 . (Pour u_0 utiliser le changement de variable $t = \sin(x)$)
- Montrer que la suite (a_n) est positive et décroissante.
- À l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n.$$

4. Déduire des deux questions précédentes que

$$a_{n+1} \sim a_n.$$

5. Montrer que la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)(n+2)(n+3) a_n a_{n+1}$$

est constante.

6. En déduire un équivalent simple de a_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

7. Déterminer la nature de la série

$$\sum_n a_n.$$

Exercice 3

Dans cet exercice N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment.

On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents.

X_N est le " nombre de changements " au cours des N premiers lancers .

Par exemple , si les 9 premiers lancers ont donné successivement :

Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux 3^{ième}, 4^{ième}, 5^{ième} et 8^{ième} lancers).

- Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, \dots, N-1\}$.
- Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
- Déterminer la loi de X_3 .
- Montrer que :

$$P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \text{ et } P(X_N = 1) = 2(N-1) \left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

5. (a) Justifier que pour tout entier k de $\{0, \dots, N-1\}$:

$$P_{X_N=k}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}$$

- (b) En déduire que pour tout entier k de $\{0, \dots, N-1\}$:

$$P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \frac{1}{2}P(X_N = k).$$

- (c) Montrer que :

$$P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}.$$

- (d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N .

6. (a) Montrer grâce aux résultats 5b) et 5c) que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.

- (b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $B(N-1, \frac{1}{2})$. Déterminer la variance $V(X_N)$.

Exercice 4

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe bornée.

1. Démontrer l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0$$

2. Démontrer que la série $\sum_n (a_n - a_{n+1}) b_n$ est absolument convergente.

3. En déduire que la série $\sum_n a_n (b_n - b_{n-1})$ converge.

4. Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

5. En déduire que $(\sum_{k=1}^n e^{ikx})_n$ est une suite bornée.

6. En utilisant les résultats précédents, montrer que :

$$\forall x \in]0, 2\pi[, \text{ la série } \sum_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}} \text{ converge.}$$

Est-elle absolument convergente ?

Vrai-Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et **justifier**.

1. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Alors, $g \circ f$ injective $\iff f$ et g injectives.
2. Soit $n \geq 2$. L'équation $z^n = \bar{z}$ possède $n+2$ solutions.
3. $\forall x > 0, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$.
4. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite alors $(u_n)_n$ converge.
5. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ni minorée, ni majorée est surjective.
6. $\sqrt{n^2+n} - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1/2$ et $\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^6$.

7. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $y' = 2y$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = Ae^{3x}$.
8. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \pi/2$.
9. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{9}$.
10. Soit P, Q deux polynômes tels que P n'admet pas de racine dans \mathbb{N} .
Si $\deg(P) - \deg(Q) > 1$ alors la série de terme général $\frac{Q(n)}{P(n)}$ converge.
11. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant unitaire et scindé sur \mathbb{R} .
On a : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |Im(z)|^{\deg(P)}$.
12. Une famille de vecteurs deux à deux non colinéaires est libre.
13. L'application $u : (x, y, z) \mapsto (-x, \frac{1}{3}z, 3y)$ est une symétrie de \mathbb{R}^3 .
14. Soient E un espace vectoriel et $u \in L(E)$.
On a : $Keru = Keru^2 \Leftrightarrow Imu \cap Keru = \{0_E\}$.
15. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe deux colonnes X, Y non nulles telles que $A = XY^T$.
16. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
17. Toute famille orthogonale d'un espace euclidien est libre.
18. L'application $(f, g) \mapsto \int_0^2 tf(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
19. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[[1, n]]$ et Y la variable telle que la loi de Y sachant $(X = k)$ est uniforme sur $[[1, k]]$ pour tout $k \in [[1, n]]$.
Alors $\forall i \in [[1, n]], P(Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k}$.

20. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 8) \end{cases}$
la fonction f admet un minimum qu'elle atteint en un unique point.

Pour bien commencer sa PSI...

Voici une liste non exhaustive des bases à avoir assimilé avant la rentrée afin de démarrer l'année dans de bonnes conditions !

Généralités

- Savoir faire une récurrence
- Savoir raisonner par l'absurde ou par contraposée
- Savoir utiliser les quantificateurs
- Savoir reconnaître des non-sens
- Être capable d'utiliser des définitions avec des quantificateurs (Exemples : limite de suite, famille libre, application surjective...)
- Savoir démontrer l'existence d'un objet par analyse-synthèse

Technique

- Être capable de dériver une composée de fonctions
- savoir manipuler les sommes et calculer des sommes de termes de suites géométriques ou arithmétiques
- Savoir exprimer à l'aide de la factorielle le produit d'entiers pairs ou le produit d'entiers impairs consécutifs.
- Savoir utiliser les complexes (racines n-ième, sommes de cos ou de sin...)
- Savoir utiliser le cercle trigonométrique, connaître les formules trigonométriques
- Savoir calculer un DL

Analyse

- Connaître les fonctions usuelles et leur graphes
- Connaître les théorèmes importants : bijection , TVI, TAF, Rolle, Formule de Taylor- Young...
- Savoir étudier la convergence d'une série (SATP, Séries ACV)
- Savoir faire une IPP, un changement de variable dans une intégrale
- Savoir étudier une suite (monotonie...) et travailler avec des suites classiques (arithmético-géométrique, récurrentes linéaires d'ordre 2...)
- Savoir calculer des dérivées partielles, déterminer des points critiques pour une fonction de 2 variables.

Algèbre

- Savoir démontrer la linéarité
- Savoir démontrer que l'on a un sev. Reconnaître un Vect...
- Connaître toutes les définitions (endomorphisme, somme de 2 sev, rang, noyau, image, base, dimension...)
- Savoir démontrer qu'une famille est une base avec différentes méthodes (libre+card, rang, det ...)
- Savoir calculer un déterminant (mat triangulaire, développement, transvection sur les lignes ou colonnes...) et savoir utiliser le déterminant
- Être capable d'écrire une matrice représentative, connaître la formule de changement de base pour un endomorphisme $A' = P^{-1}AP$
- Savoir utiliser une matrice représentative pour déterminer le noyau, l'image d'une application linéaire
- Savoir calculer l'inverse d'une matrice de taille 3 avec la méthode du pivot
- Savoir démontrer que 2 sev sont supplémentaires
- Savoir manipuler les polynômes (coefficients, degré, racines, ordre de multiplicité, degré d'un produit, d'une somme...)
- Connaître les définitions et les propriétés relatives aux projecteurs
- Savoir démontrer que l'on a un produit scalaire

- Connaître l'expression d'un projeté orthogonal dans une b.o.n. Savoir calculer une distance.

Probabilités

- Connaître les théorèmes importants (probabilités totales, F de Bayes, probabilités composées...)
- Être capable de déterminer un système complet d'événements.
- Savoir utiliser la notion d'indépendance.
- Être capable de reconnaître une loi usuelle ou de déterminer une loi (y compris loi marginale à partir de loi conjointe)
- Savoir utiliser la formule de transfert
- Reconnaître les cas d'équiprobabilité et savoir dénombrer (p combinaisons, arrangements, permutations...)