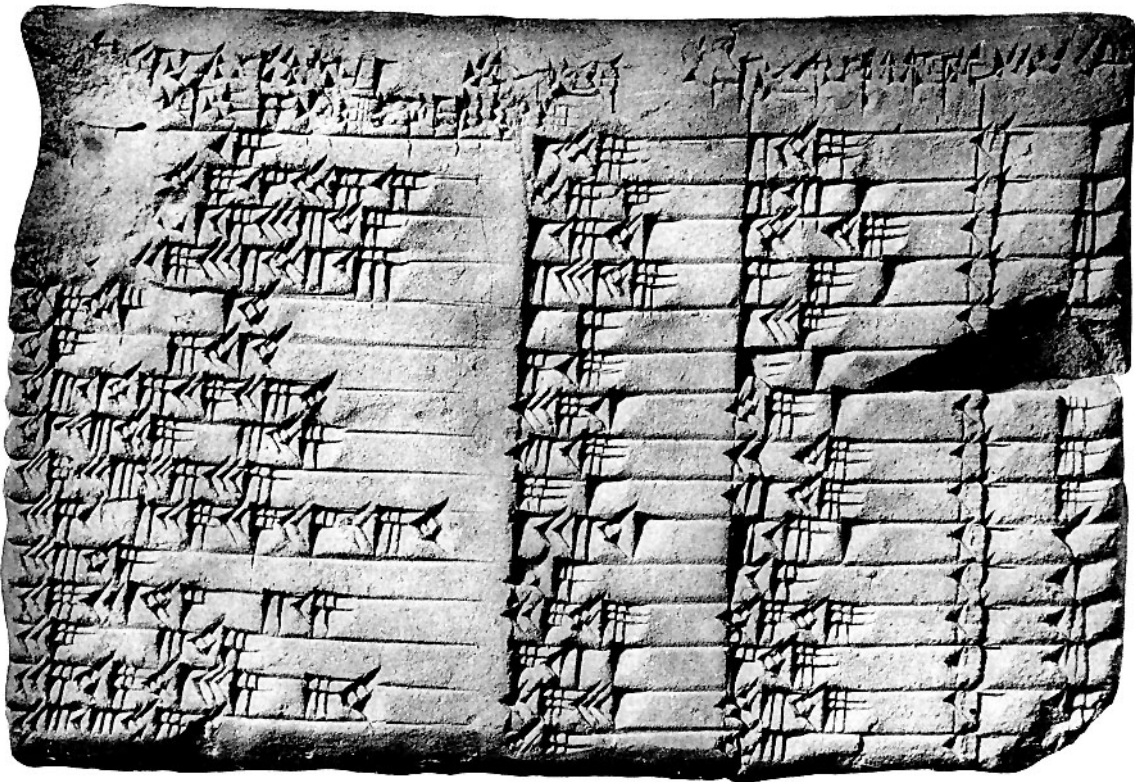


Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Page web du *Cahier de calcul*,
dernières versions



Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX,
Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY,
Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET,
Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI,
Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée. Il vous permettra d'arriver à la rentrée de septembre en étant bien au point sur les méthodes de calculs du secondaire qui seront toujours utilisées en CPGE.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte 10 fiches portant sur 10 thèmes, traitable dès la fin du lycée. Une version de ce cahier avec 32 fiches, faisable uniquement à la fin de la BCPST1, est disponible en ligne via le QR-code de la page précédente.

Les réponses à ces exercices vous seront données à la rentrée de septembre. Elles sont également accessibles via le QR-code de la page précédente.

Comment l'utiliser ?

Ce cahier de calcul est prévu pour être utilisé en autonomie. Ne cherchez pas nécessairement à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : une quinzaine de minutes par jour par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire les 10 fiches en 3 jours avant la rentrée ». Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul. Il peut être utile de parfois refaire certains calculs.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment faire les calculs afin que le corrigé vous soit profitable. N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.



Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel).

a) $\frac{32}{40}$

c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$

b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$

d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$

b) $\frac{2}{3} - 0,2$

d) $-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right)$

Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)$

b) $\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24}$

c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

d) $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$

Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

- a) $\frac{4\ 022}{(-4\ 022)^2 + (-4\ 021)(4\ 023)}$...
- c) $\frac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$
- b) $\frac{4\ 021^2}{4\ 020^2 + 4\ 022^2 - 2}$
- d) $\frac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$...

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

On utilisera la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$.

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{c}$ avec a et b entiers et $c \in \mathbb{R}^*$.

- a) $\frac{29}{6}$
- c) $\frac{3x-1}{x-2}$
- b) $\frac{k}{k-1}$

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.



Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible

Comparaisons

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9} \dots \dots \dots$ b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12} \dots \dots \dots$ c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21} \dots \dots \dots$

Calcul 1.11 — Produit en croix (I).



Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? $\dots \dots \dots$

Calcul 1.12 — Produit en croix (II).



On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$.

A-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$? $\dots \dots \dots$

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \times 10^3$

d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$

b) $(10^5)^3$

e) $\frac{(10^5 \times 10^{-3})^5}{(10^{-5} \times 10^3)^{-3}}$

c) $\frac{10^5}{10^3}$

f) $\frac{(10^3)^{-5} \times 10^5}{10^3 \times 10^{-5}}$

Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \times 5^4$

d) $(-7)^3 \times (-7)^{-5}$

b) $(5^3)^{-2}$

e) $\frac{6^5}{2^5}$

c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$

f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \times 5^{28}}$

Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \times 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 6^{-1}}$

b) $2^{21} + 2^{22}$

c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$

d) $\frac{(3^2 \times (-2)^4)^8}{((-3)^5 \times 2^3)^{-2}}$

Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\frac{8^{17} \times 6^{-6}}{9^{-3} \times 2^{42}}$

b) $\frac{55^2 \times 121^{-2} \times 125^2}{275 \times 605^{-2} \times 25^4}$

c) $\frac{12^{-2} \times 15^4}{25^2 \times 18^{-4}}$

d) $\frac{36^3 \times 70^5 \times 10^2}{14^3 \times 28^2 \times 15^6}$

Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x .

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$

b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$

c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$

d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$

Calcul littéral

Prérequis

Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$

d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$

b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$

e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$

c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$

f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$

b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$

c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$

e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2)$

f) $(x^2 + x + 1)^2$

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49$

b) $25 - (10x + 3)^2$

c) $(6x - 8)(4x - 5) + 36x^2 - 64$

d) $(-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64$

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ (où $a \neq 0$).

a) $x^2 - 2x + 1$

d) $3x^2 + 7x + 1$

b) $x^2 + 4x + 4$

e) $2x^2 + 3x - 28$

c) $x^2 + 3x + 2$

f) $-5x^2 + 6x - 1$

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.



Factoriser sur \mathbb{R} les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x + y)^2 - z^2$

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$

c) $xy + x + y + 1$

d) $xy - x - y + 1$

e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$

f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.



Factoriser sur \mathbb{R} les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $x^4 - 1$

b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$

c) $x^4 + x^2 + 1$

d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$

.....

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\quad}$ qui peuvent l'être (et en prenant garde à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

f) $\sqrt{(3 - a)^2}$

Calcul 4.2 — Des transformations d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})^2$

f) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3



Écrire les expressions suivantes sans racine carrée au dénominateur.

a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Calcul 4.4

Écrire les expressions suivantes sans racine carrée au dénominateur.

a) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

c) $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

d) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$

Calcul 4.5 — Un calcul plus difficile.

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Calculs variés**Calcul 4.6 — Avec une variable.**

On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{cases}]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x-1}. \end{cases}$$

Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$

d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$

b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$

e) $f(x) + 4f''(x)$

c) $\sqrt{x + 2f(x)}$

f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$

Calcul 4.7 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

b) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

Calcul 4.8 — Méli-mélo.



Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$

b) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$

d) $3e^{-\frac{1}{2} \ln(3)}$

e) $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$

f) $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right)$

Calcul 4.9



On note $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$.

Simplifier A

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A .

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes (I).



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Calcul 6.2 — Des racines vraiment évidentes (II).



Même exercice.

a) $x^2 - 5x = 0$

d) $x^2 + 4x - 5 = 0$

b) $2x^2 + 3x = 0$

e) $3x^2 - 11x + 8 = 0$

c) $2x^2 + 3 = 0$

f) $5x^2 + 24x + 19 = 0$

Calcul 6.3 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

Calcul 6.4 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

- a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine
- b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine
- c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine
- d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine

Calcul 6.5 — Racine évidente.



Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête et doivent être posés.

- a) $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$
- b) $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$
- c) $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$
- d) $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$
- e) $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$
- f) $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Recherche d'équations

Calcul 6.6 — À la recherche de l'équation (I).



En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13
- b) -11 et 17
- c) $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$

Calcul 6.7 — À la recherche de l'équation (II).



Même exercice.

a) $m + \sqrt{m^2 - 3}$ et $m - \sqrt{m^2 - 3}$

b) $m + 3$ et $\frac{2m - 5}{2}$

c) $\frac{m + 1}{m}$ et $\frac{m - 2}{m}$

Calcul 6.8 — Avec le discriminant.



Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$

b) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$

c) $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$

Factorisations et signe

Calcul 6.9 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x .

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$

Calcul 6.10 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$

b) $-x^2 + 2x + 15$

c) $(x + 1)(3x - 2)$

d) $\frac{x - 4}{2x + 1}$

Exponentielles

Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3\ln(2)}$

d) $e^{-2\ln(3)}$

b) $\ln(\sqrt{e})$

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

f) $e^{\ln(3)-\ln(2)}$

Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

b) $e^{-\ln(\ln(2))}$

e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$

c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$

f) $\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{1515 + x}{1515 - x}$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Montrer que, pour tous réels a et b , on a $f(a + b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- a) $f(2e^x - 1)$ d) $xf'(x) - 1$
- b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$
- c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$

Équations, inéquations

Calcul 7.10



Résoudre les inéquations suivantes (d'inconnue x).

- a) $e^{3x-5} \geq 12$ c) $e^{1+\ln x} \geq 2$
- b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$

Calcul 7.11



Résoudre les équations suivantes (d'inconnue x).

- a) $\ln(-x - 5) = \ln(x - 61) - \ln(x + 7)$
- b) $\ln(-x - 5) = \ln\left(\frac{x - 61}{x + 7}\right)$

Trigonométrie

Prérequis

Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1



Simplifier :

a) $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$

c) $\cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{4\pi}{3}$

b) $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$...

d) $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$.

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.2



Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$

Formules d'addition

Calcul 8.3



Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$ (on a $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$)

c) $\sin \frac{\pi}{12}$

b) $\cos \frac{\pi}{12}$

d) $\tan \frac{\pi}{12}$

Calcul 8.4



a) Simplifier : $\sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x)$

b) Simplifier : $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

Calcul 8.5



a) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

b) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$

Formules de duplication

Calcul 8.6



En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$

b) $\sin \frac{\pi}{8}$

Calcul 8.7



a) Simplifier : $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Simplifier : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$

Équations trigonométriques

Calcul 8.8



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$

h) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

d) $\tan x = -1$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.9



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\tan x \geq 1$

b) $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$

f) $|\tan x| \geq 1$

c) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

d) $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

Dérivation

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées (I).



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Calcul d'intégrales

Intégrales et aires algébriques

Calcul 11.1



Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^3 x^2 + e^x dx$

b) $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx$

c) $\int_0^{-1} \sin x dx$

Calcul 11.2



En se ramenant à des aires, calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 7 dx$ d) $\int_2^8 (1 - 2x) dx$

b) $\int_7^{-3} -5 dx$ e) $\int_{-2}^2 \sin x dx$

c) $\int_0^7 3x dx$ f) $\int_{-2}^1 |x| dx$

Calcul d'intégrales

Calcul 11.3 — Polynômes.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^3 2 dx$ d) $\int_{-1}^1 (3x^5 - 5x^3) dx$

b) $\int_1^3 (2x - 5) dx$ e) $\int_0^1 (x^5 - x^4) dx$

c) $\int_{-2}^0 (x^2 + x + 1) dx$ f) $\int_1^{-1} x^{100} dx$

Suites numériques

Prérequis

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Suites explicites

Calcul 21.1



Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

- | | | | |
|----------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| a) u_0 | <input type="text"/> | c) u_{n+1} | <input type="text"/> |
| b) u_1 | <input type="text"/> | d) u_{3n} | <input type="text"/> |

Calcul 21.2



Soit la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \ln\left(\frac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- | | | | |
|-------------------|----------------------|-------------------|----------------------|
| a) t_{2n} | <input type="text"/> | b) t_{4n} | <input type="text"/> |
|-------------------|----------------------|-------------------|----------------------|

Suites récurrentes

Calcul 21.3



On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

- | | |
|------------------------------|----------------------|
| a) son troisième terme | <input type="text"/> |
| b) u_3 | <input type="text"/> |

Calcul 21.4



On définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ par : $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geq 1, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

- | | |
|----------------------------|----------------------|
| a) v_3 | <input type="text"/> |
| b) son sixième terme | <input type="text"/> |

Calcul 21.5



On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

- a) w_2
- b) son centième terme

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 21.6 — Suite arithmétique (I).



La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

Calculer :

- a) a_{10}
- b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \dots + a_{99}$
- c) a_{1000}
- d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$

Calcul 21.7 — Suite arithmétique (II).



La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \frac{2}{3}$ et $b_{103} = \frac{3}{4}$.

Calculer :

- a) b_{102}
- b) r

Calcul 21.8 — Suite géométrique (I).



La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Calculer :

- a) Son dixième terme
- b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \dots + g_9$
- c) g_{10}
- d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \dots + g_{10}$

Calcul 21.9 — Suite géométrique (II).



La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q > 0$ vérifiant que $h_{11} = \frac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \frac{11\pi}{25}$.

Calculer :

- a) h_{12}
- b) q