Préparation de la rentrée en Spé MP

Les étudiants admis en Spé MP sont issus des classes MPSI (3/2) ou des élèves de la MP (5/2) qui reprennent la préparation des concours pour réaliser leurs projets (intégration d'une école qu'ils n'ont pas pu avoir la première année).

Ils doivent préparer leur entrée en MP afin d'avoir les prérequis nécessaires pour une bonne réussite.

1/ Le travail à faire pour tous :

- Faire le devoir de révision dont l'énoncé est ci-joint. Le devoir est à rendre le jour de la rentrée.
- Il faut essayer de développer son sujet TIPE avec un travail minimal qui consiste en une recherche bibliographique exhaustive.

Vous pouvez utiliser le site de l'INRIA :

« Pour ce sujet "**TIPE 2026-2027 - Sobriété, Efficacité, Optimisation**", vous trouverez :

- le dossier réalisé par Interstices et qui sera complété progressivement par de nouveaux articles : https://interstices.info/dossier/tipe-2026-2027-sobriete-efficacite-optimisation/

- le dossier Pixees avec un décryptage de la thématique à partir de quelques contributions de collègues scientifiques et un ensemble de ressources qui seront complétées au fil de l'eau : https://mediation-scientifique.gitlabpages.inria.fr/tipe-2026/ »

2/ Révision des exercices de la banque CCINP 2026-2027 :

https://www.concours-commun-inp.fr/fr/epreuves/les-epreuves-orales.html

Ci-joint un document répartissant les exercices par chapitres.

- Pour les 3/2 : Ils doivent revoir les exercices MPSI
- Pour les 5/2 : Ils doivent tout reprendre.

CONCOURS COMMUN 2007
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

<u>Vendredi 11 mai 2007 de 08h00 à 12h00</u>

<u>Instructions générales :</u>

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve spécifique.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Barème indicatif : 10 points pour chaque problème

Premier problème

I. Etude d'une fonction

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité à gauche et à droite, la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.

2. Etudier les limites et variations de f (à résumer dans un tableau) ; préciser les branches infinies.

3. Etudier la convexité ; préciser les points d'inflexion éventuels.

4. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de cette fonction relativement à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm).

   On donne les valeurs approchées suivantes : $e^{-2} \simeq 0,135$, $e^{-1} \simeq 0,36$, $e \simeq 2,72$.

   On précisera les points remarquables utilisés.

II. Calcul d'aires

5. Etant donné un nombre réel h, $h \in]0,1[$, déterminer l'aire $\mathscr{A}(h)$ de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = h$ et $x = 1$.

6. En déduire l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées, c'est à dire $\lim\limits_{h\to 0^+} \mathscr{A}(h)$.

III. Résolution d'une équation différentielle

7. Résoudre l'équation différentielle (E) $\quad x^2y' + (2x-1)y = 0$ sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.

8. Cette équation (E) a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, les préciser.

IV. Dérivées successives et polynômes associés

9. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

10. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

    $\forall x \in]0,+\infty[\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{\frac{-1}{x}}$ et que :

    (1) $\quad P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x) + [1-2(n+1)x]P_n(x)$.

11. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 .

12. Calculer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n .

13. On considère la fonction g telle que $g(x) = x^2 f(x)$.

    Démontrer que $g^{(n+1)} = f^{(n)}$

14. Rappeler la formule de Leibniz relative à la dérivée n-ième d'un produit de fonctions en indiquant les hypothèses.

15. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n)}(x)$, démontrer que :

    (2) $\quad P_{n+1}(x) = (1-2(n+1)x)P_n(x) - n(n+1)x^2P_{n-1}(x)$.

16. En déduire que : (3) $P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.

17. Déduire de (1) que : (4) $x^2P_n''(x) + (1-2nx)P_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$.

Deuxième problème

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}_2[X]$ le sous espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et le polynôme nul. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.

I. Changement de bases et division euclidienne

18. Etant donné trois réels deux à deux distincts a_1, a_2 et a_3, on considère trois polynômes Q_1, Q_2 et Q_3 de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \quad \begin{cases} Q_i(a_j) = 0 \text{ si } i \neq j \\ Q_i(a_i) \neq 0 \end{cases}$

Démontrer que Q_1, Q_2 et Q_3 sont linéairement indépendants.

19. On pose :

$$\begin{cases} P_1(X) = \dfrac{1}{8}(X-3)(X-5) \\ P_2(X) = \dfrac{-1}{4}(X-1)(X-5) \\ P_3(X) = \dfrac{1}{8}(X-1)(X-3) \end{cases}$$

Calculer $P_i(1), P_i(3)$ et $P_i(5)$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

20. En déduire que $\mathscr{P} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

21. Déterminer la matrice A de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{P}$.

22. Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

23. On pose $P_0(X) = (X-1)(X-3)(X-5)$.

Pour tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, on note $\widehat{P}(X)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0 et par f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = \widehat{P}$.

Démontrer que f est linéaire.

24. Déterminer l'image de f.

25. Déterminer le noyau de f.

26. Comparer f^2 et f ; reconnaître f et en donner les éléments caractéristiques.

27. Démontrer que $\hat{P}(X) = P(1)P_1(X) + P(3)P_2(X) + P(5)P_3(X)$.

28. Retrouver ainsi la matrice inverse de A.

II. Calcul matriciel

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

29. Calculer le produit $(M-I)(M-3I)(M-5I)$, ainsi que chacun des produits se déduisant par permutation des trois facteurs.

30. On note E l'ensemble des matrices de la forme $aI + bM + cM^2$ avec a, b, c réels.

Démontrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

31. Déterminer la dimension de E.

32. Pour tout polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$, on pose $P(M) = aI + bM + cM^2$ et on note Φ l'application de T dans E définie par $\Phi[P(X)] = P(M)$.

Démontrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

33. On pose $B_i = P_i(M)$ pour $i \in \{1,2,3\}$. En utilisant la question *27.* et le résultat précédent, exprimer I, M et M^2 sous forme de combinaison linéaire de B_1, B_2 et B_3.

34. Déduire de la question *29.* la valeur des produits B_iB_j pour $i \neq j$.

FIN DU SUJET

Les exercices de la banque du jury CC INP MP par chapitre 2026-2027

Chapitres	Les exercices correspondants
MPSI algèbre.	60, 64, 71, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 92, 94.
MPSI Analyse	3, 4, 5, 6, 7, 42, 43, 46, 55.
MPSI Probabilités et variables aléatoires discrètes	95, 98, 99, 105, 107, 109, 112.
Ch 1 : Structures usuelles. Algèbre générale, groupes, anneaux, corps	86, 94 on peut ajouter les exercices MPSI (algèbre) : 60, 64, 71, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 92, 94.
Ch 2 : Espaces vectoriels et applications linéaires (grande révision MPSI)	55, 60, 64, 87, 71, 90
Ch 3 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	59, 62, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 83, 88, 91, 93
Ch 4 : Convexité (Révisions MPSI : on insistera sur les inégalités de convexité)	Révision des exercices d'analyse MPSI
Ch 5 : Espaces vectoriels normés	1, 13, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 43, 44, 45, 54, 61
Ch 6 : Séries numériques et vectorielles (Révisions MPSI avec compléments)	5, 6, 7,40, 46, 61.
Ch 7 : Suites et séries de fonctions	8, 9, 10, 11, 12,14, 15, 16, 17,18, 48, 49, 53
Ch 8 : Séries entières	2, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 47, 32, 51.
Ch 9 : Calcul différentiel : Fonctions vectorielles d'une variable réelle.	
Ch 10 : Intégration sur un intervalle (TCD)	25, 26, 27, 28, 29, 30, 49, 50.
Ch 11 : Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens	39, 63, 66, 68, 76, 77 , 78, 79, 80, 81, 82, 92
Ch 12 : Équations différentielles linéaires	31, 32, 42, 74, 75.
Ch 13&14 : Probabilités sur un univers au plus dénombrable. Variables aléatoires discrets.	101, 105, 107, 112. V.A.D. : 95, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 104, 106, 108, 109, 110, 111.
Ch 15 : Calcul différentiel : Fonctions de plusieurs variables et optimisation	33, 41, 52, 56, 57, 58