Devoir de vacances

pour le 02/09/2025

Au moins une dizaine de jours avant la rentrée , remettez-vous progressivement au travail en retravaillant le cours de première année (soit des fiches réalisées en sup, soit à l'aide d'un livre dans le lequel il y a une partie résumant « l'essentiel du cours » pour chaque chapitre.)
Ce devoir porte sur une grande partie du cours de première année. Comptez une dizaine d'heures au total à consacrer à ce DM. Soignez la rédaction et pensez à encadrer ou souligner vos résultats en rouge.
Bon courage !

Exercice 1

Soient un réel x et k un entier strictement positif.

On pose $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{ch^k(t)}dt$.

1. (a) Calculer $I_1(x)$. On pourra faire le changement de variable $u = e^t$
   (b) Calculer $I_2(x)$. On pourra commencer par calculer la dérivée de $\dfrac{sh(x)}{ch(x)}$
2. (a) En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k . (On pourra remarquer que $\dfrac{1}{ch^k(t)} = \dfrac{ch(t)}{ch^{k+1}(t)}$)
   (b) En déduire I_3 et I_4.
3. Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :
   (a) impaire
   (b) continue sur $\mathbb{R}$
   (c) de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
4. Calculer I'_k, I''_k et I'''_k.
5. Donner le développement limité de I_k à l'ordre 3 au voisinage de 0.
6. Démontrer que I_k est monotone sur $\mathbb{R}$.
7. On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ définie par $u_n = I_k(n)$
   (a) Démontrer que cette suite est monotone.
   (b) Démontrer que pour tout réel t, $\dfrac{1}{ch(t)} \leqslant 2\exp(-t)$; en déduire que la suite converge.
8. On pose, sous réserve d'existence, $J_k = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{ch^k(t)}dt$, notée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^k(t)}dt$.
   (a) Démontrer l'existence de J_k.
   (b) Calculer J_1 et J_2
   (c) Calculer J_k .

Exercice 2

1. (a) Calculer
$$(1-q)\sum_{k=1}^{n} k.q^{k-1}$$
En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k.2^k = 2^{n+1}(n-1)+2$$
   (b) Montrer que pour $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^2.2^k = (n^2-2n+3)2^{n+1}-6$$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On place dans une urne U :
   — 2 boules numérotées 0
   — et pour tout entier k de 1 à n, 2^k boules numérotées k.

   On extrait une boule de l'urne, toutes les boules ayant la même probabilité d'être tirées, et l'on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X. (distinguer $X=0$ et les autres valeurs)
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X.
   (c) Quelle est l'espérance mathématique de X^2 ?
   (d) En déduire la variance de X.
   (e) simulation informatique en Python
      i. Écrire une fonction $liste(n)$ renvoyant une liste d'entiers représentant le contenu de l'urne
      ii. Écrire une fonction $experience(n)$ permettant de simuler une expérience. Cette fonction renvoie donc le numéro de la boule tirée.
      On utilisera la fonction randint() de la bibliothèque random.
      randint(0,N) renvoie un entier entre 0 et N.
      iii. Écrire une fonction $simuler(m, n)$ permettant de simuler m expériences telles que celle décrite ci-dessus et retournant la liste des résultats de ces m expériences.
      iv. Écrire une fonction $espérance(m, n)$ qui renvoie une estimation de l'espérance de X calculée à partir d'une simulation de m expériences. Comparer la valeur théorique et la valeur obtenue pour $m = 1000$ et $n = 8$.

3. On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante :
   — si $X = 0$ on convient de poser $Y = 0$
   — si $X = k$ avec $1 \leq k \leq n$ on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.
   On effectue alors un tirage d'une boule dans l'urne, toutes les boules restantes ayant même probabilités d'être tirées, et Y prend alors pour valeur le numéro de la boule tirée.

   (a) Déterminer pour k et i entiers entre 0 et n la probabilité conditionnelle, $p(Y = i|X = k)$.(on distinguera suivant que $i = 0$, $i > 0$, $i \geq k$ ou $i < k$ et $k = 0$)
   (b) En déduire la loi de probabilité de Y.
   (c) Vérifier que
$$\sum_{i=0}^{n-1} P(Y=i) = 1$$
   (d) Calculer l'espérance de Y.
   (e) Calculer l'espérance de XY.
   (f) En déduire la covariance de (X, Y).

Exercice 3

Dans tout cet exercice, n désigne un entier non nul, a et b sont deux nombres réels.

La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\Phi_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n(X - \frac{a+b}{2})P.$$

Partie A : Étude de Φ_1

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \Phi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - (X - \frac{a+b}{2})P.$$

1. Remontrer que Φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Soit $B_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = Mat_{B_1}(\Phi_1)$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que Φ_1 soit bijective.
4. On suppose, dans cette question seulement, que $a \neq b$.
   (a) Remontrer que la famille $B' = (X-a, X-b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
   (b) Calculer $\Phi_1(X-a)$ et $\Phi_1(X-b)$ puis déduire $M = Mat_{B'}(\Phi_1)$.
   (c) Déterminer la matrice de passage de la base B_1 à la base B', notée $P_{B_1,B'}$. Déterminer de même la matrice de passage de la base B' à la base B_1, notée P_{B',B_1}.
   (d) Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices M, M_1, P_{B',B_1} et $P_{B_1,B'}$.
   (e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question 4.(d), une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).
5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble :
$$\Gamma = \left\{\alpha I_2 + \beta M_1 + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4\right\}.$$
   (a) Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que les matrices M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2.
   (c) Déterminer une base de Γ.
6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question 5.(b), déterminer l'application Φ_1^2 .
   En déduire la nature de Φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux espaces vectoriels concernés).

Partie B : Quelques généralités sur Φ_n

1. Démontrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On se propose dans cette question de déterminer $Ker(\Phi_n)$.
   On pose $\alpha = max(a, b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$.
   (a) Démontrer que la fonction $f : x \to \dfrac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}$ est continue sur I.
   (b) Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.
   (c) Résoudre sur l'intervalle I'équation différentielle (E) :
$$y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}y = 0$$
   (d) On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
   Déduire de la question (c) une base de l'espace vectoriel $Ker(\Phi_{2p})$.
   (e) On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$.
   Déduire de la question (c) une base de l'espace vectoriel $Ker(\Phi_{2p+1})$ (On pourra discuter suivant les valeurs de a et b).

Vrai-Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

1. Soit $f : E \to F$ injective et $A \subset E$. Alors, la restriction de f à A est injective.
2. Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
3. Si $\omega \in U_n$ alors $\omega^3 \in U_{3n}$
4. Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$, $arcsin(sin(x)) \;=\; x$.
5. Soit $n \geq 2$. L'abscisse du premier extremum local sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{sin(kx)}{k}$ vaut $\frac{\pi}{n+1}$.
6. Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.
7. Une fonction périodique est bornée.
8. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_1, ..., x_n \in [0,1]$.
   Il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$.
9. (*) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a)f'(b) > 0$.
   Il existe 3 réels différents c_1, c_2 et c_3 tels que $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$ et $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} xcos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
11. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = e^{2/3}$.
12. Les solutions de $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont de la forme $x \mapsto e^x(Acosx + Bsinx)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
13. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 cos(t)dt < 2$.
14. $\displaystyle\int_0^1 Arcsin(\sqrt{t})dt = \frac{\pi}{2}$.
15. Si la série de terme général $\sum e^{in} u_n$ est absolument convergente alors les séries $\sum u_n$ et $\sum \cos(2n) u_n$ convergent.
16. On a l'inégalité : $\forall k \in \mathbb{N}^*, ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$ et on peut en déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ diverge.
17. Si la série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ converge, alors la série de terme général u_{2n} converge.
18. Les racines du polynôme $X^{2n} - 1$ sont simples.
19. $P = \frac{1}{4}X^2$ est la seule solution non nulle dans $\mathbb{R}[X]$ de $(P')^2 \;=\; P$.
20. Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F + G = F \cap G$.
    Alors, $F = G$.
21. l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
22. Si p est un projecteur, alors $Imp = Ker(p - Id)$.
23. Soit $u, v \in L(E)$. $uov = O \Leftrightarrow Imv \subset Keru$.
24. Tout vecteur d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complété en une base.
25. Si $u \in L(E,F)$ avec E, F de dimension finie et u injective, alors :
    $dim(E) \leq dim(F)$.
26. Les matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$ commutent avec toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$.
27. Il existe une base de $M_n(\mathbb{R})$ composée de matrices de rang 1.
28. Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers positifs est un entier positif.

29. Une matrice antisymétrique de $M_{2n}(\mathbb{R})$ n'est pas inversible.
30. L'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
31. Pour toute partie A d'un espace euclidien E, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
32. Soit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. On a : $n^2 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$.
33. Soit x et y deux vecteurs d'un espace euclidien de même norme.

    Alors, $x-y$ et $x+y$ sont orthogonaux.

    On définit sur $\mathbb{R}^2$, $f : (x,y) \to x^4 + y^4 - 4xy$
34. f possède exactement trois points critique.
35. f admet un maximum local en $(0,0)$.
36. Deux événements disjoints sont indépendants.
37. Deux événements indépendants sont disjoints.
38. Soit A de probabilité dans $]0,1[$. Pour tout $B \subset \Omega$, $P(B|A) + P(B|\overline{A}) = 1$.
39. Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi et $a \in \mathbb{R}$.

    On a : $P(X_1 > a) = 0 \Rightarrow P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n > na) = 0$.
40. Pour toute variable réelle discrète X, $E(X)^2 \leq E(X^2)$.

Pour bien commencer sa PSI...

Voici une liste non exhaustive des bases à avoir assimilé avant la rentrée afin de démarrer l'année dans de bonnes conditions !

Généralités

- Savoir faire une récurrence
- Savoir raisonner par l'absurde ou par contraposée
- Savoir utiliser les quantificateurs
- Savoir reconnaitre des non-sens
- Être capable d'utiliser des définitions avec des quantificateurs (Exemples : limite de suite, famille libre, application surjective...)
- Savoir démontrer l'existence d'un objet par analyse-synthèse

Technique

- Être capable de dériver une composée de fonctions
- savoir manipuler les sommes et calculer des sommes de termes de suites géométriques ou arithmétiques
- Savoir exprimer à l'aide de la factorielle le produit d'entiers pairs ou le produit d'entiers impairs consécutifs.
- Savoir utiliser les quantificateurs
- Savoir utiliser les complexes (racines n-ième, sommes de cos ou de sin...)
- Savoir utiliser le cercle trigonométrique, connaitre les formules trigonométriques
- Savoir calculer un DL

Analyse

- Connaitre les fonctions usuelles et leur graphes

- Connaitre les théorèmes importants : bijection , TVI, TAF, Rolle, Formule de Taylor- Young...
- Savoir étudier la convergence d'une série (SATP, Séries ACV)
- Savoir faire une IPP, un changement de variable dans une intégrale
- Savoir étudier une suite (monotonie...) et travailler avec des suites classiques (arithmético-géométrique, récurrentes linéaires d'ordre 2...)
- Savoir calculer des dérivées partielles, déterminer des points critiques pour une fonction de 2 variables.

Algèbre

- Savoir démontrer la linéarité
- Savoir démontrer que l'on a un sev. Reconnaitre un Vect...
- Connaitre toutes les définitions (endomorphisme, somme de 2 sev, rang, noyau, image, base, dimension...)
- Savoir démontrer qu'une famille est une base avec différentes méthodes (libre+ card, rang, det ...)
- Savoir calculer un determinant (mat triangulaire, développement, transvection sur les lignes ou colonnes...) et savoir utiliser le déterminant
- Être capable d'écrire une matrice représentative, connaitre la formule de changement de base pour un endomorphisme $A' = P^{-1}AP$
- Savoir utiliser une matrice représentative pour déterminer le noyau, l'image d'une application linéaire
- Savoir calculer l'inverse d'une matrice de taille 3 avec la méthode du pivot
- Savoir démontrer que 2 sev sont supplémentaires
- Savoir manipuler les polynômes (coefficients, degré, racines, ordre de multiplicité, degré d'un produit, d'une somme...)
- Connaitre les définitions et les propriétés relatives aux projecteurs
- Savoir démontrer que l'on a un produit scalaire
- Connaitre l'expression d'un projeté orthogonal dans une b.o.n. Savoir calculer une distance.

Probabilités

- Connaitre les théorème importants (probabilités totales, F de Bayes, probabilités composées...)
- Être capable de déterminer un système complet d'événements.
- Savoir utiliser la notion d'indépendance.
- Être capable de reconnaitre une loi usuelle ou de déterminer une loi (y compris loi marginale à partir de loi conjointe)
- Savoir utiliser la formule de transfert
- Reconnaitre les cas d'équiprobabilité et savoir dénombrer (p combinaisons, arrangements, permutations...)