Devoir en temps libre 0

A rendre le 02/09

Une attention particulière sera portée à la rédaction

Aucun résultat n'est attendu sous forme décimale : les approximations induites par une mise sous forme décimale d'un nombre n'étant pas décimal seront pénalisées.

Introduction

Les mathématiques ne sont pas la science du calcul, mais celle du raisonnement ; néanmoins une bonne maîtrise du calcul s'impose pour faciliter tous les raisonnements. L'objectif de ce devoir est donc de vous remettre à niveau sur ce sujet. Si vous souhaitez vous entraîner un peu plus, nous vous conseillons vivement le Cahier de Calcul disponible ici.

Calcul numérique

Fractions

On rappelle la « règle » suivante de calcul :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (c,d) \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \frac{c}{c} = 1\,,$$

c'est-à-dire que lorsque l'on multiplie deux fractions, il suffit de multiplier numérateurs et dénominateurs entre eux. En ce qui concerne la somme, la formule théorique est un peu plus complexe :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (c,d) \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}\,.$$

En pratique, nous n'utilisons jamais mécaniquement cette formule, mais nous *réduisons au même dénominateur* des fractions. Considérons l'exemple suivant :

$$\frac{3}{20} + \frac{7}{12} = \frac{3}{20} \times \frac{3}{3} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{5} = \frac{9+35}{60} = \frac{46}{60} = \frac{23}{30}\,.$$

L'idée de prendre 60 comme dénominateur commun vient de ce que 60 est le plus petit multiple commun de 20 et 12.

Exercice 1

Simplifier autant que possible les fractions suivantes :

$$a) \quad \tfrac{3}{27} \quad b) \quad \tfrac{100}{125} \quad c) \quad \tfrac{252}{105} \quad d) \quad \tfrac{35}{63} \quad e) \quad \tfrac{140}{24} \quad f) \quad \tfrac{216}{64}$$

Exercice 2

Effectuer les opérations suivantes (on présentera le résultat sous la forme d'une fraction aussi simple que possible) :

$$a) \quad \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{7} \quad b) \quad \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \quad c) \quad \tfrac{7}{10} + \tfrac{4}{15}$$

$$d) \quad \tfrac{5}{6} + \tfrac{8}{21} \quad e) \quad \tfrac{3}{56} + \tfrac{5}{4} \quad f) \quad \tfrac{4}{35} + \tfrac{5}{49}$$

Puissances

Nous rappelons que l'on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = \underbrace{x \times x \ldots x}_{(n \text{ facteurs})} \quad \text{et} \quad x^0 = 1\,.$$

De même, si x est non-nul et n est un entier naturel on pose

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n = (x^n)^{-1}\,.$$

On en déduit donc les propriétés suivantes pour tous réels a et b et tous entiers n et m (si l'un des deux est négatif, on prendra soin de supposer, si nécessaire a ou b différents de 0) :

$$a^n a^m = a^{n+m}\,, \quad a^n b^n = (ab)^n\,, \quad (a^n)^m = a^{n \times m}\,.$$

Exercice 3

Présenter les quantités suivantes sous la forme $2^n 3^m$ avec n et m des entiers relatifs.

$$a)\ \frac{4^5\cdot 3^7}{2^4}\quad b)\ \frac{16^2\cdot 3^7}{54}\quad c)\ \frac{(8^2)^3\cdot 3^4}{12^3}\quad d)\ \frac{(14^2)^3\cdot 27^3}{49\cdot(21)^4}\quad e)\ \frac{18\cdot 12}{81^2}\quad f)\ \frac{2^3\cdot 36^4\cdot(3^2)^3}{18\times 12^4}\,.$$

Racines

Nul besoin de redéfinir la racine carrée, avec laquelle vous êtes familier ; nous le ferons cependant au cours de l'année d'une manière rigoureuse. Rappelons la propriété suivante :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\qquad \sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$$

qui ne doit pas vous mener à penser des bêtises, en effet faites bien attention au fait suivant :

$$\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}\quad\text{par exemple}\quad \sqrt{2}=\sqrt{1+1}\neq\sqrt{1}+\sqrt{1}=2\,.$$

Exercice 4

Mettre les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un rationnel.

$$a)\ \sqrt{8}\quad b)\ \sqrt{18}\quad c)\ \sqrt{\frac{14}{63}}\quad d)\ \sqrt{162}\quad e)\ \sqrt{\frac{4}{98}}\quad f)\ \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{225}}$$

La quantité conjuguée de $x+y\sqrt{u}$ est $x-y\sqrt{u}$ on obtient alors grâce à l'identité remarquable

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

que l'égalité suivante est vérifiée

$$\frac{1}{x+y\sqrt{u}}=\frac{1}{x+y\sqrt{u}}\times\frac{x-y\sqrt{u}}{x-y\sqrt{u}}=\frac{x-y\sqrt{u}}{x^2-y^2u}\,.$$

Cette formule n'est pas à apprendre par cœur, loin de là ! Il convient cependant de connaître l'existence de la quantité conjuguée et de savoir refaire rapidement et efficacement la petite gymnastique donnée plus haut sur les cas particuliers, par exemple :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}=-1+\sqrt{2}\,,$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}\,.$$

Exercice 5

Écrire sans radicaux au dénominateur les fractions suivantes :

$$a)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\quad b)\ \frac{1}{2+\sqrt{3}}\quad c)\ \frac{1}{\sqrt{5}+1}\quad d)\ \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\quad e)\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}\quad f)\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\,.$$

Calcul littéral

Comme vous l'avez vu dans la présentation très formelle des exercices précédents et des rappels de cours, le calcul littéral[1] est central dans l'enseignement des mathématiques. Aussi il convient d'en avoir de bonnes bases et manipuler correctement les *équations*.

Exercice 6

Résoudre les inconnues suivantes d'inconnue réelle x :

$$\begin{array}{llllllllllll}
a) & 3x & = & 4x-1 & b) & \sqrt{2}x & = & 0 & c) & 7x+2 & = & 3x+4\\
d) & \pi x+3 & = & 2x+\sqrt{2} & e) & \frac{7}{5}x+\sqrt{3} & = & \frac{2}{3}x-\sqrt{2} & f) & \frac{5}{7}x-\pi & = & \frac{3}{5}x+8
\end{array}$$

1. C'est-à-dire avec des *lettres*

Inéquations

Rappelons que la manipulation des inéquations pose quelque difficultés en plus que pour les équations, en effet l'on a bien que si a, b, c, d sont des réels tels que

$$a \leqslant b, \quad \text{et} \quad c \leqslant d\,,$$

l'on a bien $a + c \leqslant b + d$. La multiplication pose quelques problèmes supplémentaires : si $x \geqslant 0$ alors

$$ax \leqslant bx\,,$$

tandis que si $x \leqslant 0$, on a

$$ax \geqslant bx\,,$$

c'est-à-dire que le sens est renversé.

Exercice 7

Pour chacune des inégalités ci-dessous, déterminer les réels x les vérifiant

$$\begin{array}{llllllllllll} a) & 7x-3 & \geqslant & 3 & b) & 3x+4 & \geqslant & 2x-5 & c) & 5x+8 & \geqslant & 6x+4 \\ d) & \sqrt{2}x+2 & \geqslant & x+1 & e) & \pi x+8 & \geqslant & 4x+1 & f) & \sqrt{7}x+8 & \geqslant & \sqrt{2}x+9 \end{array}$$

Développement

Développer une quantité consiste à transformer un produit en somme, ce qui se voit bien pour deux termes

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

Ainsi l'on a par exemple

$$(3x+2)(5x+1) = 15x^2 + 3x + 10x + 2 = 15x^2 + 13x + 2\,.$$

On rappelle bien entendu certaines identités remarquables qui, comme indiqué par leur nom, méritent d'être remarquées, de sorte à accélérer le calcul :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2\,.$$

On a dû aussi vous donner l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, mais elle est contenue dans $(a+b)^2$.

Exercice 8

Développer les quantités suivantes

$$\begin{array}{llllll} a) & (x+2)^2 & b) & (x+\sqrt{2})(x-2) & c) & (x+3)(x-7)(x-3) \\ d) & (x-5)^2(x+\sqrt{3}) & e) & (x-\sqrt{2})(x+3\sqrt{2})(2x+1) & f) & (x+1)(2x-5)(x-\sqrt{17}) \end{array}$$

Factorisation

La factorisation est l'opération inverse du développement : elle consiste à transformer une somme en produit. Ainsi l'on a par exemple

$$7x + 14 = 7(x+2)\,, \quad \text{ou} \quad (x+2)(x-1) + 3(x+2) = (x+2)(x-1+3) = (x+2)^2\,.$$

ou encore grâce à l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$x^2 - 7 = x^2 - \sqrt{7}^2 = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})\,.$$

Exercice 9

Factoriser les quantités suivantes :

$$\begin{array}{llll} a) & (x-1)x^2 + 3(x-1) + x(x-1) & b) & x + 1 + (x+1)x^2 + 2(x+1) \\ c) & x^2 - 4x + 4 & d) & 9x^2 + 12x + 4 \\ e) & x^2 - 5 & f) & (x-1)^2 - (x-2)^2 \\ g) & (x-1)x^2 + x^2 - 2x + 1 & h) & (x-1)^2 - 3(x-1)(x+3) \end{array}$$

Fonctions élémentaires

Second degré

On rappelle qu'une fonction polynômiale du second degré à coefficients est une fonction de la forme

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array}$$

où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est une racine de f si $f(x_0) = 0$. Vous connaissez la formule donnant les racines en fonction du discriminant. Il est à noter une propriété importante :

Proposition 1

Soit f une fonction polynômiale du second degré. On suppose que f admet deux racines x_0 et x_1 avec $x_0 \leqslant x_1$. La quantité $f(x)$ est du signe contraire à celui de a si et seulement si $x \in [x_0, x_1]$, c'est-à-dire :

— *Si $a \geqslant 0$, alors $f(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [x_0, x_1]$.*

— *Si $a \leqslant 0$, alors $f(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [x_0, x_1]$.*

Si f n'admet pas de racines, alors la quantité $f(x)$ est de signe constant.

Ainsi si l'on se donne pour objectif de résoudre l'inéquation

$$3x^2 + 2x \leqslant 3 + 4x\,,$$

on obtient qu'elle est équivalente à

$$3x^2 - 2x - 3 \leqslant 0\,.$$

Or le polynôme $3x^2 - 2x - 3$ a pour discriminant

$$\Delta = 4 + 36 = 40\,,$$

et donc pour racines

$$x_0 = \frac{4-\sqrt{40}}{6} = \frac{4-2\sqrt{10}}{6} = \frac{2-\sqrt{10}}{3}, \quad x_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{3}\,.$$

Aussi l'ensemble des solutions de l'inégalité est $\left[\frac{2-\sqrt{10}}{3}, \frac{2+\sqrt{10}}{3}\right]$.

Exercice 10

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnues réelles x.

$$\begin{array}{lrcllrcl} a) & x^2-1 & \geqslant & 0 & b) & x^2-3x & \leqslant & 4 \\ c) & 3x^2+3x-3 & \geqslant & 2x^2+5x-10 & d) & 2x(x-1) & \leqslant & 12 \\ e) & x-7 & \leqslant & \frac{1}{x+1} & f) & 2x^3+2x^2 & \leqslant & x^3+3x \end{array}$$

Exponentielle

Il serait hors de portée de ce devoir maison, et même de l'année d'E.C.G. de vous définir proprement et méthodiquement la fonction exponentielle. Il est cependant assez courant de lire des erreurs sur les manipulations de cette dernière. Brièvement rappelons que si l'on considère

$$\exp\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)\,,$$

l'on a les relations suivantes :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b), \quad (\exp(a))^b = \exp(ab)\,.$$

En vérité, vous le savez, il existe un réel noté e et nommé constante d'Euler tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x\,.$$

Ainsi les relations données plus haut se ré-écrivent pleinement et sont parfaitement en accord avec celles données sur les puissances.

Exercice 11

Factoriser à l'aide des identités remarquables :

$$a)\ e^{2x} - e^{-2x} \quad b)\ e^{2x} + 2 + e^{-2x} \quad c)\ e^{x} - e^{-x}\,.$$

Logarithme

Le logarithme est, nous le verrons, la bijection réciproque de l'exponentielle. Ce que vous devez comprendre de la phrase précédente est

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(\ln(a)) = a, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x\,.$$

A l'aide de ceci, on en démontre les relations suivantes :

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln(a^b) = b\ln(a)\,.$$

Comme vous vous en doutez, en combinant astucieusement ces relations, on obtient

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)\,.$$

Exercice 12

Écrire en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants :

$a)$	$\ln(4)$	$c)$	$\ln\left(\frac{8}{81}\right) + 4\ln(3)$
$b)$	$\ln(24) - \ln(3)$	$d)$	$\ln(0,25)$

$$e)\ \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{6}\right) + \ln\left(\frac{6}{7}\right) + \ln\left(\frac{7}{8}\right)$$

Dérivation

Exercice 13

Dériver les expressions suivantes de la variable réelle x (on ne demande aucune justification sur la dérivabilité, ni l'intervalle de dérivabilité)

$a)$	$x+1$	$e)$	$\frac{e^x+1}{e^{2x}+1}$	$i)$	$(x^2+1)\sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$
$b)$	x^2+1	$f)$	$\frac{\ln(x)+1}{(\ln(x))^2+1}$	$j)$	$\frac{\exp\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)}{x^2+1}$
$c)$	$\frac{x+1}{x^2+1}$	$g)$	$\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$	$k)$	$(x^2+1)(\sqrt{x}+1)$
$d)$	$\exp\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$	$h)$	$\sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$	$l)$	$\sin\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\right)$