Devoirs de vacances des futurs MPSI du lycée Albert Schweitzer

Bravo pour votre admission !

L'ensemble du programme de terminale doit être révisé, mais il n'est pas indispensable de prendre de l'avance sur le programme de classes préparatoires.
Ceux qui n'ont pas suivi le programme *mathématiques expertes* sont invités à étudier le cours sur les nombres complexes.
Les variables aléatoires à densité et l'échantillonnage en statistique n'ont pas besoin d'être travaillé. Il s'agit de tout ce qui concerne les lois à densité, les lois uniformes, les lois exponentielles, les lois normales, les intervalles de fluctuation ou de confiance.

Voici quelques exercices à chercher (**sans calculatrice**) pour aborder au mieux l'année prochaine.

Quelques rappels (non exhaustifs) sont donnés au gré des exercices et demandent une attention particulière.

Ne pas réussir les exercices n'est pas gênant. Mais les travailler est essentiel. Il vous faudra apprendre à chercher sans trouver immédiatement une solution.
Le document est composé de trois parties :

- les énoncés ;
- des indications ;
- les réponses.

Les réponses sont parfois succinctes. Il importe de faire soi-même les calculs menant aux résultats afin de bien les comprendre et surtout d'acquérir une indispensable efficacité calculatoire.

Pour ceux qui veulent s'entraîner davantage, un cahier de calcul est également disponible à l'adresse :

`https://molin-mathematiques.fr/sources/exercices189.php`

Ne s'intéresser qu'aux feuilles 1 à 7, 9 et 16
Bon courage !

Énoncés

1 Manipulations algébriques

À savoir :

- Manipulation des opérations algébriques élémentaires et maîtrise du calcul littéral. Factorisations et développements (en particulier les expressions polynomiales).
- Racines carrées, valeurs absolues.
- Savoir résoudre équations et inéquations.
- Manipulation du signe $\sum$.

Rappel : si α annule une expression polynomiale en la variable x, alors $(x-\alpha)$ factorise cette expression.
Si $\Delta < 0$, alors l'expression polynomiale de degré 2 n'est pas factorisable sur $\mathbf{R}$ (ou uniquement par des constantes).

Énoncé 1 (*)

Pour $x > 0$, simplifier l'expression $\sqrt{\dfrac{x^{n+2}+x^2}{x^{n+1}+x}}$.

Énoncé 2 (*)
Montrer que l'expression suivante ne dépend pas de $n \in \mathbf{N}$ et donner sa valeur.

$$\frac{\left(8^{n+1}+8^n\right)^2}{\left(4^n-4^{n-1}\right)^3}.$$

Énoncé 3 (*)
Factoriser les expressions suivantes sur $\mathbf{R}$.

1) $a = x^4 - 2x^2 + 1$.
2) $b = x^4 + x^2 - 2$.

Énoncé 4 (*)
Résoudre les équations suivantes en x (sur $\mathbf{R}$).

1) $x^2 + \left(2\sqrt{2}-2\right)x + 3 = 2\sqrt{2}$.
2) $2x^2 - \left(\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)x + \sqrt{3} = 0$.

Énoncé 5 (**)
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbf{R}$.

1) $x - 4 = \sqrt{2x-5}$.
2) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

Énoncé 6 (**)
Soit $m \in \mathbf{R}$, on considère l'équation

$$(E_m) \qquad (m-2)\,x^2 + 2\,(m-4)\,x + (m-4)\,(m+2) = 0.$$

1) Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence et le nombre de solutions de l'équation (E_m).
2) Pour quelles valeurs de m, l'équation admet-elle -1 comme solution ?

2 Inégalités

À savoir :

- Résoudre ou établir des inégalités.
- Opérations sur les inégalités (produit, somme, inverse) avec **rigueur.** En particulier :
  - Le passage à l'inverse change le sens de l'inéquation quand les deux membres sont *strictement* du même signe.
  - Le produit d'inéquations préserve l'ordre lorsque les termes sont *positifs*.
- Distinguer les opérations sur les inégalités qui préservent l'équivalence ou celles qu'il ne donnent qu'une implication. Par exemple, le passage à l'exponentielle donne une équivalence. Mais la mise au carré nécessite de savoir que les nombres sont positifs pour obtenir une équivalence.
- Lien inégalités - monotonie d'une fonction
- Résoudre une inégalité par l'étude d'une fonction.
- Bien distinguer les inégalités larges et les inégalités strictes.

Énoncé 7 (*)
Montrer que pour tout $x \geqslant 1$,

$$\frac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geqslant \frac{1-x}{2}.$$

Énoncé 8 (*)
Résoudre les inéquations suivantes en sur $\mathbf{R}$.

1) $x+1 < x-1$.
2) $(x+1)^2 < (x-1)^2$.
3) $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$.
4) $\sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2}$.

Énoncé 9 (**)
Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbf{R}$.

1) $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2-1} \leqslant 1$.
2) $\dfrac{x^3-1}{x+1} \leqslant x^2-x-1$.

Énoncé 10 (*)
Résoudre

$$\mathrm{e}^x + 1 \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

Indication : on pourra poser $X = \mathrm{e}^x$.

Énoncé 11 (**)

1) Étudier les variations de $f\ : x \mapsto \mathrm{e}^x - (1+x)$.
2) En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.

3 Suites numériques

À savoir :

- Suites arithmétiques et géométriques. Somme des termes.
- Convergence et divergence de suites, monotonie.
- Toute suite monotone admet une limite.
- Théorèmes de comparaison (gendarmes, minoration, majoration).

Énoncé 12 (*)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique telle que $u_2 = 9$ et $u_5 = 243$.

1) Déterminer la raison q de la suite et son premier terme u_0.
2) Exprimer u_n en fonction de n.
3) Calculer la somme $S = \sum\limits_{k=3}^{8} u_k = u_3 + u_4 + \ldots + u_8$.
   On se satisfera d'une expression littérale simple.

Énoncé 13 (*)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -4$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Énoncé 14 (**)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = -3u_n + 2.$$

1) Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ solution de l'équation

   $$\ell = -3\ell + 2.$$

   Donner la valeur de ℓ.
2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique.
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Énoncé 15 (*)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \frac{2 + (-1)^n n}{n^2+1}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{2-n}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2+n}{n^2+1}$.
2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Énoncé 16 (**)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \sqrt{n^2 - 2n + 3}.$$

1) Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ (c'est-à-dire que $n^2 - 2n + 3 \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$).

2) Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant n - 1$.

3) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Énoncé 17 (***)
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad v_n = u_{n+1} - 2u_n.$$

   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique.
   (b) Déterminer v_n en fonction de n.

3) Soit $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N},\ w_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.

   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite arithmétique.
   (b) Exprimer w_n en fonction de n, et en déduire u_n en fonction de n.

4 Études de fonctions

À savoir :

- Fonctions usuelles (puissances, inverses, logarithmes, exponentielles, racines, valeurs absolues, sinus, cosinus)
- Domaine de définition, limites et savoir dériver : $\sqrt{u}$, u^n $(n \in \mathbf{Z})$, e^u, $\ln u$ où u est une fonction dérivable, ainsi que $x \mapsto f(ax+b)$ où f est une fonction dérivable.
- Dérivée et sens de variations, dérivée en un point avec la limite du taux de variations.
- Intégrale.
- Calculs de limites, croissances comparées, utilisation de la quantité conjuguée.
- Théorèmes usuels (avec les hypothèses précises) : théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
- Tracer l'allure de la courbe représentative d'une fonction avec ses éléments remarquables.

Énoncé 18 (**)
Dans chaque cas, déterminer le domaine de définition de la fonction et les intervalles de dérivabilité. Puis calculer la dérivée.

1) $f_1 : x \mapsto \left(\dfrac{2x+1}{4-x}\right)^5$.

2) $f_2 : x \mapsto (1-x)\sqrt{x}$.

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$.

4) $f_4 : x \mapsto x\ln^n(x)$ pour $n \geqslant 1$.

Énoncé 19 (**)
Dans chaque cas, étudier la fonction : domaine de définition, tableau de variation, limites aux bornes, allure de la courbe représentative.

1) $f_1 : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.

2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^n}$ $(n \in \mathbf{N}^\star)$.

3) $f_3 : x \mapsto \exp\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

5 Nombres complexes et trigonométrie

À savoir :

- Représentation géométrique d'un nombre complexe.
- Mise sous forme algébrique et sous forme trigonométrique (notation exponentielle).
- Somme et produit, partie réelle, imaginaire, conjugué, module.
- Trigonométrie
  - cos, sin ; leur dérivée et leur courbe représentative.
  - Valeurs remarquables en 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$,...

- les relations usuelles $\cos(a+b)$, $\cos(x+2\pi)$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(\pi-x)$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(-x)$. Les mêmes relations avec le sinus.
- Formules d'Euler : $\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}$.

Énoncé 20 (*)
Mettre sous forme algébrique (cartésienne) :

1) $a = \dfrac{1+5i}{1+i}$.
2) $b = (1+i)^3$.

Énoncé 21 (*)
Mettre sous forme trigonométrique (notation exponentielle) :

1) $a = (1+i)^{50}$.
2) $b = 1 - i\sqrt{3}$.
3) $c = (4-4i)(1-i\sqrt{3})$.
4) $d = \dfrac{2}{1-i}$.

Énoncé 22 (***)
Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

1) Factoriser $\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ib}$ par $\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}$ et simplifier au maximum l'expression obtenue en utilisant les formules d'Euler.
2) Idem avec $\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{ib}$.
3) En déduire que pour tout couple $(p,q) \in \mathbf{R}^2$, on a
$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

6 Primitives et intégrales

À savoir :

- Les primitives usuelles.
- Primitiver des formes $\frac{u'}{u}$, $u'u^n$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ et $u'e^u$.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.
- Les propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité et relation de Chasles.

Énoncé 23 (*)
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction sur l'intervalle considéré.

1) $f_1 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.
2) $f_2 : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.
3) $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ sur $]1,+\infty[$.
4) $f_4 : x \mapsto \sin(x)\,(\cos(x))^3$ sur $\mathbf{R}$.

Énoncé 24 (***)
Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

1) Montrer que $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.
2) En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
3) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Indications

Indication 1(*)
Factoriser le numérateur par x^2 et le dénominateur par x puis simplifier la fraction.

Indication 2(*)
Factoriser le numérateur par 8^n et le dénominateur par 4^n puis exprimer 8 et 4 comme des puissances de 2. Utiliser les règles de calcul sur les puissances.
Se fait sans calculatrice, ce qui n'empêche pas de poser un ou deux calculs si besoin.

Indication 3(*)

1) Identité remarquable avec $X = x^2$.
2) Chercher les racines avec le changement de variable $X = x^2$, puis trouver les valeurs de x correspondantes.

Indication 4(*)
Calculer Δ.

Indication 5(**)

1) ⚠ Domaine de définition.

   Soit on commence par chercher le domaine de définition et on résout sur celui-ci, soit on raisonne par analyse-synthèse = on travaille par implications pour trouver les valeurs qui peuvent convenir (sans s'occuper du domaine de définition) et on teste ensuite si ces valeurs sont bien solution (cette méthode sera revue). Penser à élever au carré !
2) On commence par chercher une racine évidente α et on factorise l'expression par $x - \alpha$.

Indication 6(***)

1) Traiter $m = 2$ à part : ce n'est pas une équation de degré 2.
   Dans les autres situations, commencer par calculer Δ et factoriser au maximum.
   Cela donne le nombre de solutions (on ne demande pas leur expression).
   On pourra utiliser un tableau de signes.
2) Remplacer x par -1 et trouver m.

Indication 7(*)
On ne peut pas diviser par $1 - x$ avant de s'être assuré de son signe et de sa non nullité. Distinguer les cas $x = 1$ et $x > 1$.

Indication 8(*)

1)
2) $\sqrt{x^2} \neq x$ en général (mais il n'est pas nécessaire de passer par la racine).
3) Attention au domaine de définition.

Indication 9(**)
Veiller à bien distinguer les intervalles ouverts et fermés.

1) Pour la positivité, il suffit de réaliser un tableau de signe.
   Pour la comparaison à 1, soit on soustrait les deux membres, soit on multiplie par $x^2 - 1$ en étudiant son signe avant.
2) Attention au signe si on réalise un produit.

Indication 10(*)

Indication 11(**)

1) Utiliser le signe de $f'(x)$.
2) La fonction f admet-elle un minimum ?

Indication 12(*)

1) Exprimer u_5 en fonction de q et u_2.
2) Exprimer u_2 en fonction de q et u_0 pour trouver u_0. Appliquer ensuite une formule du cours.
3) Appliquer une formule du cours.

Indication 13(*)

Indication 14(**)

1)
2) Étudier $u_{n+1} - \ell$
3) Penser à vérifier son résultat avec les premiers termes de la suite.

Indication 15(**)

1) $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

Indication 16(**)

1) degré 2.
2) Directement à n fixé : ne pas faire de récurrence.
3) Découle de la question précédente.

Indication 17(***)

1)
2)
3) (a) Utiliser la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ précédente.
   (b) Vérifier son résultat avec les premiers termes de la suite u déjà calculés.

Indication 18(**)

1) $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
2) Dérivée d'un produit.
3) Dérivée d'un quotient.
4) Dérivées d'un produit et de u^n.

Indication 19(**)

1) Écrire la dérivée comme une seule fraction.
2) Pour la limite en $+\infty$, penser à $\ln x = \frac{1}{n}\ln(x^n)$.
3)

Indication 20(*)

1) Utiliser la quantité conjuguée pour se débarrasser du i au dénominateur.
2) Ici, comme la puissance est « petite », on peut développer à la main.

Indication 21(*)

1) Commencer par $1+i$ avant de mettre à la puissance 50.
2)
3) Commencer par chacun des facteurs avant de faire le produit.
4) Commencer par le dénominateur.

Indication 22(*)

1) Se rappeler que $\mathrm{e}^{i\alpha}\,\mathrm{e}^{i\beta} = \mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}$.
2)
3) Utiliser que $\cos(\theta) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\theta}\right)$.

Indication 23(*)

Point de salut sans connaissance précise du cours ! Reconnaître des formes $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$ ou $u'\,\mathrm{e}^u$.

Indication 24(***)

1) Commencer par montrer que $0 \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.
2) Utiliser la croissance de l'intégrale.
3)

Réponses

Attention ! Ne sont regroupés ici que des éléments de réponse, en particulier les résultats. En l'état, ce ne sont pas des solutions acceptables. Toute conclusion mathématique doit être <u>**rédigée**</u> et <u>**argumentée**</u> : théorèmes cités, hypothèses vérifiées, articulations logiques précisées, le tout dans une <u>**rédaction**</u> structurée au moyen de <u>**phrases**</u> (sujet-verbe-complément au minimum).
Par exemple « $f(x) = x\ln x \quad f'(x) = 1 + \ln x$ » n'est pas une réponse acceptable. En revanche « Soit $f : x \mapsto x\ln x$. Par produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$, f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ on calcule que $f'(x) = 1 + \ln x$. » pourra l'être.
Les éléments qui suivent n'incluent pas cette rédaction qu'il vous appartient de mettre en oeuvre.

Réponse 1(*)
$\sqrt{x}$.

Réponse 2(*)
192.

Réponse 3(*)

1) $a = (x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$.
2) $b = \left(x^2+2\right)(x+1)(x-1)$.

Réponse 4(*)

1) Racine double $x = 1-\sqrt{2}$.
2) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+2\pm\sqrt{7}\right)$.

Réponse 5(*)

1) $x = 7$.
2) $x \in \{1, 2\}$.

Réponse 6(***)

1) Pour $m = 2$, on trouve $x = -2$ comme unique solution.
Sinon, on a $\Delta = 4m(m-4)(1-m)$.
On fait un tableau de signes.

m	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$4m$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$m-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-m$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

.

Pour $m = 0$, $m = 1$ ou $m = 4$, on trouve $\Delta = 0$ et il y a donc une unique solution.
Pour $m \in]-\infty, 0[\cup]1, 4[$, $\Delta > 0$ et il y a deux solutions.
Pour $m \in]0, 1[\cup]4, +\infty[$, $\Delta < 0$ et il n'y a pas de solution réelle.

2) On trouve $m \in \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Réponse 7(*)

Réponse 8(*)

1) $\mathscr{S} = \emptyset$.
2) $\mathscr{S} = \mathbf{R}_-^*$.
3) $\mathscr{S} = [1, +\infty[$.
4) $\mathscr{S} = \mathbf{R}$.

Réponse 9(**)

1) $\mathscr{S} = \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.
2) $\mathscr{S} =]-1, 0]$.

Réponse 10(*)
$\mathscr{S} = \left]-\infty, \ln\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$.

Réponse 11(**)

1) Par différence, f est dérivable et $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Après étude du signe de $f'(x)$, on obtient f décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et croissante sur $\mathbf{R}_+$.
2) On observe que f admet un minimum en 0, donc $f(x) \geqslant f(0)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Cela donne $\mathrm{e}^x - (1+x) \geqslant 0$.

Réponse 12(*)

1) $u_5 = q^3 u_2$, on trouve $q = 3$ (sans calculatrice).

2) $u_0 = \dfrac{1}{q^2} u_2 = 1$, donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 3^n$.

3) Somme géométrique : $S = 3^3 \, \frac{1-3^6}{1-3} = \frac{27}{2}\left(3^6 - 1\right)$.

Réponse 13(*)
Pour l'initialisation : $u_1 = -\frac{4}{2} = -2 = u_0 + \frac{1}{2^{-1}}$.
Pour l'hérédité :

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2^n} = u_{n+1} + \frac{1}{2^n}.$$

Réponse 14(**)

1) $\ell = \frac{1}{2}$.

2) $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison -3.

3) $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = \frac{3}{2}(-3)^n$, donc $u_n = \frac{1}{2}\left(1 - (-3)^{n+1}\right)$.

Réponse 15(*)

1) Immédiat en sachant que $n^2 + 1 > 0$.

2) Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{2-n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n}\dfrac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
De même pour $\dfrac{2+n}{n^2+1}$.
Donc u_n tend vers 0 d'après le théorème d'encadrement, aussi appelé théorème des gendarmes.

Réponse 16(**)

1) $\Delta = -8 < 0$ donc $n^2 - 2n + 3 > 0$ sur $\mathbf{R}$.

2) $n^2 - 2n + 3 \geqslant n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$.

3) $n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
donc par minoration, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Réponse 17(**)

1) $u_2 = -8$ et $u_3 = -28$.

2) (a) $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison 2.
(b) $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = -3 \cdot 2^n$.

3) (a) $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison $-\frac{3}{2}$.
(b) $\forall n \in \mathbf{N}$, $w_n = 1 - \frac{3n}{2}$ et $u_n = 2^n\left(1 - \frac{3n}{2}\right)$.

Réponse 18(**)

1) Définie et dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{4\}$; $f_1'(x) = \frac{45}{(4-x)^2}\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^4$.

2) Définie sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$; $f_2'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$.

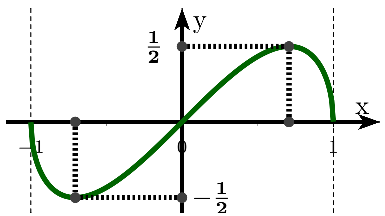
3) Définie sur $[0, 2[\cup]2, +\infty[$ et dérivable sur $]0, 2[\cup]2, +\infty[$; $f_3'(x) = -\frac{x+2}{2(x-2)^2\sqrt{x}}$.

4) Définie et dérivable sur $]0, +\infty[$; $f_4'(x) = (n + \ln x)\ln^{n-1}(x)$.

Réponse 19(**)
Les calculs de dérivées sont sans doute plus compliqués que ceux que vous avez rencontrés jusqu'à présent. Il est primordial de faire ces calculs pour trouver le chemin qui mène jusqu'aux résultats.

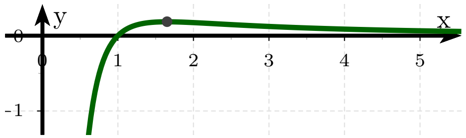
1) Définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$; $f_1'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.
On sait que $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et $x^n \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$ donc $\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = -\infty$.
On sait que $f_2(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln(x^n)}{x^n}$ et $\frac{\ln t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$.

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f_1'(x)$		$-$	0		$+$		0		
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



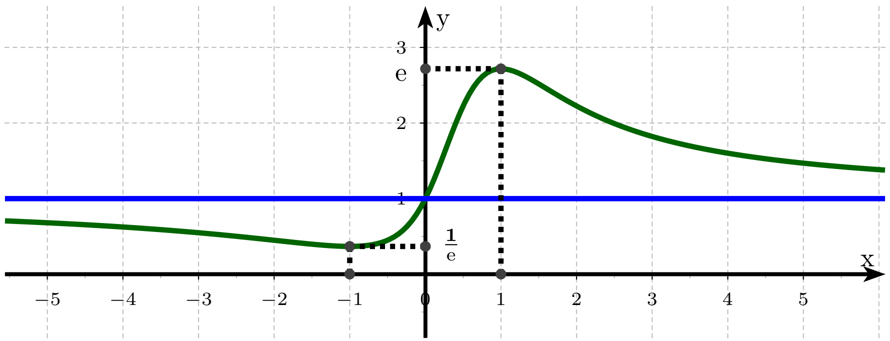
2) Définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$: $f_2'(x) = \frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

x	0		$\exp\left(\frac{1}{n}\right)$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{n\,\mathrm{e}}$	$\searrow$	0



3) Définie et dérivable sur $\mathbf{R}$; $f_3'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\exp\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.
On écrit $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}$ pour trouver $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+1} = 0$ puis finalement $\lim_{x\to\pm\infty} f_3(x) = \mathrm{e}^0 = 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f_3'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	1



Réponse 20(*)

1) $a = 3+2i$.

2) $b = -2+2i$.

Réponse 21(*)

1) $a = 2^{25}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$.

2) $b = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) $c = 4\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\,2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = 8\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}}$.

4) $d = \frac{2}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

Réponse 22(***)

1) $$\begin{aligned}\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ib} &= \mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{a-b}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\\ &= 2\,\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).\end{aligned}$$

2) De même, $\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{ib} = 2i\,\mathrm{e}^{i\frac{a+b}{2}}\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

3) $$\begin{aligned}\cos(p)+\cos(q) &= \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}\right)\\ &= \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right)\\ &= 2\,\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

Réponse 23(*)

1) En posant $u(x)=\sqrt{x}$, on reconnaît $f_1(x) = 2u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.
Primitive de f_1 : $F_1(x) = 2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C$.

2) En posant $u(x)=\ln(x)$, on reconnaît $f_2(x) = u'(x)u(x)$.
Primitive de f_2 : $F_2(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2+C$.

3) En posant $u(x)=\ln(x)$, on reconnaît $f_3(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
Primitive de f_2 : $F_3(x) = \ln\left(\ln(x)\right)+C$.

4) En posant $u(x)=\cos(x)$, on reconnaît $f_4(x) = -u'(x)u^3(x)$.
Primitive de f_4 : $F_4(x) = -\frac{1}{4}\left(\cos(x)\right)^4+C$.

Réponse 24(***)

1) On sait que $0 < 1 \leqslant 1 + x^n$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^\star$, donc $0 < \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$. On multiplie par le réel positif x^n pour conclure.

2) Par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$. On calcule que $\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

3) On sait que $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Le théorème d'encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes) montre que $\lim I_n = 0$.