Devoir de vacances

pour le 04/09/2017

Au moins une dizaine de jours avant la rentrée ; remettez-vous progressivement au travail en retravaillant le cours de première année (soit des fiches réalisées en sup, soit à l'aide d'un livre dans le lequel il y a une partie résumant « l'essentiel du cours » pour chaque chapitre.) Ce devoir porte sur une grande partie du cours de première année. Comptez une dizaine d'heures au total à consacrer à ce DM. Ne perdez pas de temps avec un brouillon (juste pour rechercher les idées), soignez la rédaction et pensez à encadrer ou souligner vos résultats en rouge. Bon courage !

Exercice 1

Soient un réel x et k un entier strictement positif. On pose $I_k(x) = \int_0^x \frac{1}{ch^k(t)} dt$.

1. (a) Calculer $I_1(x)$. On pourra faire le changement de variable $u = e^t$
   (b) Calculer $I_2(x)$. On pourra commencer par calculer la dérivée de $\frac{sh(x)}{ch(x)}$
2. (a) En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k . (On pourra remarquer que $\frac{1}{ch^k(t)} = \frac{ch(t)}{ch^{k+1}(t)}$)
   (b) En déduire I_3 et I_4.
3. Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :
   (a) Impaire
   (b) continue sur $\mathbb{R}$
   (c) de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
4. Calculer I'_k, I''_k et I'''_k.
5. Donner le développement limité de I_k à l'ordre 3 au voisinage de 0.
6. Démontrer que I_k est monotone sur $\mathbb{R}$.
7. On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ définie par $u_n = I_k(n)$
   (a) Démontrer que cette suite est monotone.
   (b) Démontrer que pour tout réel t, $\frac{1}{ch(t)} \leqslant 2\exp(-t)$; en déduire que la suite converge.
8. On pose, sous réserve d'existence, $J_k = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{ch^k(t)} dt$, notée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^k(t)} dt$.
   (a) Démontrer l'existence de J_k.
   (b) Calculer J_1 et J_2
   (c) Calculer J_k .

Exercice 2

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension n, avec $n \geqslant 2$. Si v est un endomorphisme de E, pour tout entier naturel k, on note v^k l'endomorphisme défini par récurrence par $v^0 = Id$, où Id représente l'endomorphisme identité, et $v^{k+1} = v^k \circ v$.

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A.

Dans cette partie, on suppose que l'entier n est égal à 2, et on considère un endomorphisme f vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $(x, f(x))$ soit une base de E.
2. En déduire que la matrice associée à f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie B.

Dans cette partie, on suppose que $n = 4$ et on cherche à résoudre l'équation $u^2 = -Id$, où u est un endomorphisme de E. Soit f une solution de cette équation.

1. Montrer qu'il n'existe pas de scalaire λ tel que l'équation $f(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in E$, admette une solution non nulle.
2. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre. On note F le sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Quelle est la dimension de F ?
3. (a) Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(x, f(x), z_1, z_2)$.
   (b) Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (z_1, z_2) ; soit y un vecteur non nul de G. Montrer que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
4. Montrer que dans une base bien choisie, la matrice associée à f s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie C.

On suppose dans cette partie, que E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3
On définit sur E l'application f qui à tout polynôme P de E, associe $f(P)$ défini par

$$f(P)(X) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

où P' et P'' sont respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. (a) Écrire la matrice associée à f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E.
   (b) En déduire le rang de f et $Ker(f)$.
   (c) Montrer que $Ker(f) \oplus Ker(f + 2Id) = E$.
   (d) En déduire une base de E notée B_1 dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
3. On veut résoudre dans cette question, l'équation $u^2 = f$ dans laquelle l'inconnue u désigne un endomorphisme de E. Soit g une solution de cette équation.
   (a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à g^2 s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
   (b) Montrer que f et g commutent, c'est-à-dire que pour tout x de E, on a $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.
   (c) On s'intéresse à la restriction de g à $Ker(f)$. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de $Ker(f)$ qu'on notera g_0.

Montrer de même que la restriction de g à $Ker(f+2Id)$ définit un endomorphisme de $Ker(f+2Id)$ qu'on notera g_{-2}.

4. En utilisant les résultats des parties précédentes, donner la forme d'une matrice associée à g.

Exercice 3

1. (a) Calculer

$$(1-q)\sum_{k=1}^{n} k.q^{k-1}$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k.2^k = 2^{n+1}(n-1)+2$$

(b) Montrer que pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.2^k = (n^2-2n+3)2^{n+1}-6$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On place dans une urne U :
— 2 boules numérotées 0
— et pour tout entier k de 1 à n, 2^k boules numérotées k.

2. On extrait une boule de l'urne, toutes les boules ayant la même probabilité d'être tirées, et l'on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X. (distinguer $X=0$ et les autres valeurs)

(b) Calculer l'espérance mathématique de X.

(c) Quelle est l'espérance mathématique de X^2 ?

(d) En déduire la variance de X.

(e) simulation informatique en Python

i. Écrire une fonction $liste(n)$ renvoyant une liste d'entiers représentant le contenu de l'urne

ii. Écrire une fonction $experience(n)$ permettant de simuler une expérience. Cette fonction renvoie donc le numéro de la boule tirée.
On utilisera la fonction randint() de la bibliothèque random. randint(0,N) renvoie un entier entre 0 et N.

iii. Écrire une fonction $simuler(m,n)$ permettant de simuler m expériences telles que celle décrite ci-dessus et retournant la liste des résultats de ces m expériences.

iv. Écrire une fonction $espérance(m,n)$qui renvoie une estimation de l'espérance de X calculée à partir d'une simulation de m expériences. Comparer la valeur théorique et la valeur obtenue pour $m=1000$ et $n=8$.

3. On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante :
— si $X=0$ on convient de poser $Y=0$
— si $X=k$ avec $1 \leq k \leq n$ on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.
On effectue alors un tirage d'une boule dans l'urne, toutes les boules restantes ayant même probabilités d'être tirées, et Y prend alors pour valeur le numéro de la boule tirée.

(a) Déterminer pour k et i entiers entre 0 et n la probabilité conditionnelle, $p(Y=i|X=k)$.(on distinguera suivant que $i=0$, $i>0$, $i \geq k$ ou $i<k$ et $k=0$)

(b) En déduire la loi de probabilité de Y.

(c) Vérifier que
$$\sum_{i=0}^{n-1} p(Y=i) = 1$$

(d) Calculer l'espérance de Y.

(e) Calculer l'espérance de XY.

(f) En déduire la covariance de (X,Y).

Exercice 4

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ où p désigne un entier naturel fixé.

1. Montrer que si $p=0$ ou si $p=1$ la série de terme général (u_n) diverge.

   On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.

   (b) En déduire par récurrence sur n que
$$S_n = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1})$$

3. (a) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

   (b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

   (c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général (u_n) converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.

4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.

   (a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty, u_n \sim \frac{\ell}{n}$.

   (b) En déduire une contradiction avec la troisième question.

5. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On pose : $\forall (A,B) \in E^2, < A,B >= Tr(A^TB)$ où Tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $<,>$ est un produit scalaire sur E.

2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E. Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.

   (a) Montrer que que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

   (b) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

   (c) Prouver que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

   (d) Déterminer $A_\perp$ le projeté orthogonal de A sur $S_n(\mathbb{R})$.

   (e) En déduire l'expression de la distance de A à l'espace $S_n(\mathbb{R})$,notée $d(A, S_n(\mathbb{R}))$ en fonction des coefficients de la matrice A.

3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.

   (a) On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $i \in [[1,n]]$. Déterminer $< A, E_{i,i} >$.

   (b) En déduire $F^\perp$.