Travail de vacances en maths

Pour préparer l'entrée en seconde année, il est impératif de revoir l'intégralité du cours (et des exercices et devoirs !) de première année. Pour certains, revoir les "bases" de terminale me semble indispensable.

Il convient de travailler régulièrement sans attendre la fin août.

Vous me remettrez le jour de la rentrée (le lundi 4 septembre) le devoir dont le sujet suit (DM 1). Ceux qui sont plus à l'aise en mathématiques et qui envisagent sérieusement de briguer les meilleures écoles, traiteront également le second sujet (DM 1bis) sur une copie distincte.
Il y aura également un devoir le premier samedi (ouvert) de septembre (soit le 9 septembre) qui comportera une vingtaine de questions de cours, ou d'applications directes du cours, ainsi que deux exercices très semblables à des exercices du DM.
Une seconde année réussie passe obligatoirement par un travail régulier dès le mois de juillet (au moins une dizaine d'heures par semaine, une quinzaine en août). Ce sont vos résultats aux concours qui en dépendent ! La seconde année est trop brève et trop intense pour consacrer du temps à cet indispensable travail. Qui plus est, le contenu des enseignements de seconde année nécessite une bonne maîtrise du programme de première année (et du second cycle !). Intégrer la seconde année avec des lacunes est un handicap insurmontable.

Bonnes vacances !

DM 1

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que : $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$.

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $f(x)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que $g(t) = \frac{e^t}{t}$ et G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction G.

b. Déduire de la question précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

c. Calculer $f(1)$.

2. a. Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \times \ln x$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

3. a. Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \times \ln x$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité 1 cm pour les abscisses et e cm pour les ordonnées (on rappelle que le nombre e est à peu près égal à $2,7$.

a. On note f'' la dérivée seconde de f. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f''(x)$.

b. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A et déterminer les coordonnées du point A.

c. Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.

d. Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.

6. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant $\displaystyle\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = n$.

b. En utilisant les variations de la fonction f, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

c. Déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.

a. La matrice M est-elle inversible ?

b. Calculer pour tout entier $n \geq 2$, la matrice M^n.

2. Dans cette question, on choisit $a = b$.

a. La matrice M est-elle inversible ?

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $M^n = (1+a)^{n-1} M$.

3. On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.
Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$.

4. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$. On pose : $q = 1 - p$.
Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'événement : " la matrice N est inversible ".

a. Établir la relation : $P([X=Y]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P([X=k]) \times P([Y=k])$.

b. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{\cdot 2k-2}$.

c. En déduire $P(A)$ en fonction de q.

5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'événement : " la matrice N est inversible ".

a. Pour x réel, écrire les développements de $(x+1)^n$ et $(x+1)^{2n}$ à l'aide de la formule du binôme.

b. En utilisant l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$, montrer que l'on a : $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

c. En déduire la relation : $P([X=Y]) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

d. Calculer $P(A)$ en fonction de n.

Exercice 3

1. Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Donner sans calcul les valeurs de l'espérance $E(T)$ et de la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

a. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X à densité.

b. En utilisant la question **1.**, montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et donner sa valeur.

3. Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
Montrer que l'on a : pour tout x réel, $F(x) = \begin{cases} 1-(x+1)e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes les deux la même loi que X.
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \min(X_1, X_2)$.

4. a. Justifier que pour tout x réel, on a $P([Z > x]) = P([X_1 > x]) \times P([X_2 > x])$.

b. Déterminer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z.

c. Montrer qu'une densité h de Z est donnée par : $h(x) = \begin{cases} 2x(x+1)e^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$g(x) = -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x}.$$

On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

a. Pour tout x réel, calculer $g'(x)$.

b. En déduire que l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z est égale à $\frac{5}{4}$.

6. Soit W la variable aléatoire définie par $W = \max(X_1, X_2)$.

a. Exprimer la variable aléatoire $Z + W$ en fonction de $X_1 + X_2$.

b. En déduire la valeur de l'espérance $E(W)$ de la variable aléatoire W.

c. Exprimer la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$ en fonction de Z et W.

d. En déduire la valeur de l'espérance $E(|X_1 - X_2|)$ de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

Exercice 4

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 et I la matrice unité d'ordre 3. On pose par convention : $M^0 = I$.

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, soit X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0 et X_1.

2. **a.** Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$.

b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire pour tout entier naturel, la relation $X_n = A^n X_0$.

3. Soit P, Q et T les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P.

b. Calculer les produits PT et AP. En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité $A^n = PT^nP^{-1}$.

4. Soit D la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.

a. Déterminer pour tout entier $k \geq 2$, la matrice N^k.

b. Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel n, on a : $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

5. **a.** Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

DM 1bis

Exercice 1

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. On désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$.

2. **a.** Exprimer, pour tout réel t et tout entier k, $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.

b. En déduire que :

$$\forall t \in [0, 1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

c. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}$.

3. Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 2

Soit n un entier supérieur à 2. On pose $E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
On considère la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'éléments de E_n définie par :

$$e_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (X + i) \quad \text{où } 1 \leqslant k \leqslant n$$

1. Montrer que cette famille est libre. En déduire que c'est une base de E_n.

2. En déduire l'existence de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x).$$

3. Calculer λ_k en fonction de n et du coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$.

4. En déduire la formule :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k-1}(\ln(k+1) - \ln(k))$$

Exercice 3

On considère la suite $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $s_1 = 1,\ s_2 = \frac{4}{5},\ s_3 = \frac{2}{5}$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_{n+3} = \frac{3}{2}s_{n+2} - s_{n+1} + \frac{1}{4}s_n.$$

1. Établir, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité : $s_n = \dfrac{1}{5 \times 2^{n-2}} + \dfrac{3}{5 \times 2^{(n-2)/2}} \times \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + X - \frac{1}{4}$ admet une racine réelle λ_1, valant $\frac{1}{2}$; déterminer ses deux racines complexes λ_2 et λ_3 dont on précisera le module et un argument.

4. On admet qu'il existe trois nombres complexes α_1, α_2 et α_3 vérifiant, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation suivante : $s_n = \dfrac{\alpha_1}{2^n} + \alpha_2\lambda_2^n + \alpha_3\lambda_3^n$.

Calculer α_1, α_2 et α_3.

Retrouver la limite de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

1. Quelle est la loi de $Z = \lfloor 2X \rfloor$?
(lorsque $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t)

2. Que vaut $P(\cos(X) > \frac{1}{2})$?

3. **a.** Déterminer les solution de l'inéquation d'inconnue t : $t^2 + t + 1 - \alpha \leqslant 0$.
On distinguera les cas selon la valeur du paramètre réel α.

b. Que valent $P(X^2 + X + 1 \leqslant 1)$, $P(X^2 + X + 1 \geqslant 3)$ et $P(X^2 + X + 1 \leqslant 2)$?

c. Déterminer la fonction de répartition de $Y = X^2 + X + 1$.
En déduire que Y est une variable aléatoire réelle à densité. Déterminer une densité de Y.

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune un loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer la probabilité $P(X \geqslant a)$ pour $a \in \mathbb{N}$.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X \geqslant mY)$ et en donner un équivalent simple quand m tend vers $+\infty$.

3. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune a boules blanches et b boules rouges, dans lesquelles on effectue des tirages d'une boule avec remise. Déterminer la probabilité qu'il faille deux fois plus (au sens large) de tirages dans l'urne U_1 que dans l'urne U_2 pour obtenir la première boule blanche.

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul.
On considère une famille $F = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi_i(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t) \cdot P_i(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que : $\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \varphi_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

2. Montrer que : F est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si, $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

3. On suppose que F est libre.
Montrer que : $\exists S \in \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X] : \quad P(0) = \displaystyle\int_0^1 P(t) \cdot S(t)\mathrm{d}t$.