Travail de vacances en maths

Pour préparer l'entrée en seconde année, il est impératif de revoir l'intégralité du cours (et des exercices et devoirs !) de première année. Pour certains, revoir les "bases" de terminale me semble indispensable.

Il convient de travailler régulièrement sans attendre la fin août.

Vous me remettez, le jour de la rentrée (le jeudi 1er septembre) le devoir dont le sujet suit.
Il y aura également un devoir le premier samedi de septembre (le 3 septembre) qui comportera une vingtaine de questions de cours, ou d'applications directes du cours, ainsi que deux exercices très semblables à des exercices du DM.
Une seconde année réussie passe obligatoirement par un travail régulier dès le mois de juillet (environ une dizaine d'heures par semaine). Ce sont vos résultats aux concours qui en dépendent !
Bonnes vacances !

DM 1

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout x de $[0,+\infty[$, par la relation : $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$.

1. **a.** On note f' la dérivée de f. Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.

b. Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.

c. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad u_{n+1}=f(u_n)$.

2. **a.** Calculer u_1 et u_2.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0<u_n\leq\frac{1}{n}.$$

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}$.

a. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de u_n.

b. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'encadrement suivant :

$$2\leq v_n\leq 2+\frac{1}{n}.$$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$2(n+1)\leq\frac{1}{u_n}\leq 2(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

5. **a.** Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, comparer $\frac{1}{k}$ et $\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}dt$.

b. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq 1+\ln n.$$

6. Utiliser les questions précédentes pour déterminer un équivalent de u_n lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 2

Toutes les matrices considérées dans cet exercice sont des matrices carrées d'ordre 3.

On note I la matrice définie par $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Si $(a_n),(b_n),(c_n),(d_n),(e_n),(f_n),(g_n),(h_n),(i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives a,b,c,d,e,f,g,h,i, on pose :

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}a_n&b_n&c_n\\d_n&e_n&f_n\\g_n&h_n&i_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 3, on pose, pour tout entier naturel n,

$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k$, c'est-à-dire que $S_n=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+...+\frac{1}{n!}A^n$.

On pose également $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ lorsque cette limite existe.

1. Dans cette question, la matrice A est donnée par $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

a. Calculer A^2.

b. Calculer A^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer A^k.

c. Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de S_n sous forme de tableau matriciel.

d. En déduire l'expression de la matrice S.

2. Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer A^2.

b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'expression de A^k en fonction de k.

c. Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante :

$$S_n = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) A.$$

d. Donner l'expression de S sous forme de tableau matriciel.

3. Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calculer $A^2 - 2A + I$.

b. Etablir, pour tout k de $\mathbb{N}$, la relation : $A^k = kA - (k-) I$.

c. Donner l'expression de S_n en fonction de A et de I.

d. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!} = -\frac{1}{n!}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}$

e. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} = \mathrm{e}$

f. Déduire des questions précédentes, l'expression de S sous forme de tableau matriciel.

Exercice 3

Dans cet exercice, tous les événements considérés sont définis dans un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
On note $\overline{M}$ l'événement contraire de M.

1. On considère trois événements A, B, C tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0, \mathbb{P}(B) \neq 1, \mathbb{P}(C) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$.

a. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B} \cap C\right)$$

b. En déduire alors la formule suivante : $\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}_{B\cap C}(A)\,\mathbb{P}_C(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}\cap C}(A)\,\mathbb{P}_C\left(\overline{B}\right)$

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce amenant *Pile* avec la probabilité p $(0 < p < 1$), et *Face* avec la probabilité q, où $q = 1 - p$.
On admet que les résultats des différents lancers sont indépendants.
Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement : "on obtient *Face* à l'issue du k-ième lancer".
$\overline{F_k}$ est donc l'événement : "on obtient *Pile* à l'issue du k-ième lancer".
On considère l'événement E : "2 *Face* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 *Pile* consécutifs".
Par exemple :

- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}F_5F_6$, alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont $\overline{F_1}F_2F_3\overline{F_4}\,\overline{F_5}F_6$, alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}\,\overline{F_5}F_6$,alors $\overline{E}$ est réalisé.

2. a. Donner sans calcul la valeur de $\mathbb{P}_{F_1\cap F_2}(E)$.

b. Justifier également sans calcul la relation suivante $\mathbb{P}_{F_1\cap\overline{F_2}}(E) = \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$.

c. En utilisant la relation trouvée à la question **1.b.**, avec $A = E, B = F_2$ et $C = F_1$, trouver une relation entre $\mathbb{P}_{F_1}(E)$ et $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$.

3. **a.** Que vaut $\mathbb{P}_{\overline{F_1} \cap \overline{F_2}}(E)$?

b. Montrer que $\mathbb{P}_{\overline{F_1} \cap F_2}(E) = \mathbb{P}_{F_1}(E)$.

c. Toujours en utilisant la relation de la question **1.**(b) appliquée à des événements bien choisis, montrer que $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = q\mathbb{P}_{F_1}(E)$.

4. **a.** Déduire des questions **2.** et **3.** les égalités

$$\mathbb{P}_{F_1}(E) = \frac{q}{1-pq} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = \frac{q^2}{1-pq}.$$

b. Calculer $\mathbb{P}(E)$ en fonction de p et de q.

5. On note G l'événement : " 2 *Pile* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 *Face* consécutifs"

a. Expliquer comment trouver $\mathbb{P}(G)$ sans calcul.

b. Vérifier que $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = 1$. Comment interpréter ce dernier résultat ?

Exercice 4

Pour toute variable aléatoire Z *admettant une espérance et une variance, ces dernières sont notées* $\mathbb{E}(Z)$ *et* $\mathbb{V}(Z)$ respectivement.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a et b sont deux réels.

1. Vérifier que f est une densté de probabilité d'une variable aléatoire X dont l'espérance vaut $\frac{3}{5}$, si et seulement si $a = \frac{6}{5}$ et $b = \frac{3}{5}$

Dans toute la suite, on prendra pour a et b les valeurs données ci-dessus

2. Calculer la variance de X.

3. Déterminer la fonction de répartition, notée F, de la variable X.

4. $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ étant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X, on considère, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire S_n définie par :

$$S_n = \sup(X_1, X_2, ..., X_n),$$

c'est-à-dire telle que pour tout réel x, on a :

$$[S_n \leq x] = ([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap ... \cap [X_n \leq x]).$$

a. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n, notée F_n, est donnée par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2x^3+3x}{5}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b. Justifier que $E(S_n) = \int_0^1 x f_n(x)\, dx$, où f_n désigne une densité de S_n.

c. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la formule suivante :

$$\mathbb{E}(S_n) = 1 - \int_0^1 F_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

d. Etablir, pour tout x de $[0, 1]$, l'inégalité suivante : $F_n(x) \leq \left(\frac{3x+2}{5}\right)^n$

e. Pour tout x de $[0, 1]$,on pose $g_n(x) = \left(\frac{3x+2}{5}\right)^n$.

Vérifier qu'une primitive G_n de g_n sur $[0, 1]$ est donnée par :

$$G_n(x) = \frac{5}{3(n+1)} \left(\frac{3x+2}{5}\right)^{n+1}.$$

f. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(S_n) = 1$.