Travail de vacances en maths

Pour préparer l'entrée en seconde année, il est impératif de revoir l'intégralité du cours (et des exercices et devoirs !) de première année. Pour certains, revoir les "bases" de terminale me semble indispensable.

Il convient de travailler régulièrement sans attendre la fin août.

Vous me remettrez le jour de la rentrée (le lundi 3 septembre) le devoir dont le sujet suit (DM 1). Le sujet est long, mais le délai est important. Les exercices regroupent des questions relativement classiques, aucune n'est très difficile : il faut juste chercher le temps nécessaire. Apprendre à chercher, passer une heure, voire plusieurs, sur une question n'est pas une perte de temps, c'est un investissement !
Traiter ce devoir est bien évidemment loin d'être suffisant. Une seconde année réussie passe obligatoirement par un travail régulier dès le mois de juillet (au moins une dizaine d'heures par semaine, une quinzaine en août). Ce n'est qu'un fil conducteur de votre travail de vacances.
Vos résultats aux concours dépendent de votre investissement pendant ces vacances. La seconde année est trop brève et trop intense pour consacrer du temps à ces indispensables révisions. Qui plus est, le contenu des enseignements de seconde année nécessite une bonne maîtrise du programme de première année (et du second cycle !). Intégrer la seconde année avec des lacunes est un handicap insurmontable.

Bonnes vacances !

Un premier concours blanc sera organisé lors de la semaine de la rentrée.

DM 1

Calculs algébriques

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système de n équations d'inconnue $(x_1, ..., x_n)$: $\qquad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad x_k + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 2

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ et a_{13} treize nombres réels tels que $a_1 < a_2 < \ldots < a_{12} < a_{13}$.

On veut établir qu'il existe $(i, j) \in [\![1, 13]\!]^2$ tels que $0 < \dfrac{a_i - a_j}{1 + a_i a_j} < 2 - \sqrt{3}$.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $x - y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ on a : $\quad \tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$.

2. En utilisant $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. Justifier qu'il existe treize réels distincts $\alpha_1, \ldots, \alpha_{13}$ de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que, pour tout $i \in [\![1, 13]\!]$ on ait : $\tan(\alpha_i) = x_i$.

4. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, 12]\!]$ tel que $0 < \alpha_{i+1} - \alpha_i < \frac{\pi}{12}$.

5. Conclure.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note $F_p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$.

L'objectif de cet exercice est d'expliciter une formule de récurrence exprimant $F_p(n)$ en fonction de $F_0(n), F_1(n), ...$ et $F_{p-1}(n)$.

Commençons par noter que $F_0(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^0 = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$.

Ensuite, on est enclin à remarquer que :

D'une part, $\quad F_2(n + 1) = F_2(n) + (n + 1)^2$,

et d'autre part, $\quad F_2(n + 1) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n+1} k^2 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (k + 1)^2$.

On en déduit que : $\quad F_2(n + 1) - F_2(n) = (n + 1)^2 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (k + 1)^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (k + 1)^2 - k^2$.

Ou encore : $\quad (n + 1)^2 - 1 = \sum\limits_{k=1}^{n} (k + 1)^2 - k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (2 \cdot k^1 + k^0) = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} k^1 + \sum\limits_{k=1}^{n} k^0 = 2F_1(n) + F_0(n)$.

Et finalement : $\quad F_1(n) = \dfrac{(n + 1)^2 - 1 - F_0(n)}{2} = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

Ce n'est évidemment pas la façon la plus simple d'expliciter $F_1(n)$. Mais cette méthode va permettre de calculer les sommes suivantes...

1. En raisonnant comme ci-dessus, exprimer $F_2(n)$ en fonction de $(n + 1)^3, F_1(n)$ et $F_0(n)$. Retrouver alors l'expression de $F_2(n)$ en fonction de n.

2. Faire de même pour $F_3(n)$ (à exprimer en fonction de $(n + 1)^4, F_2(n), F_1(n)$ et $F_0(n)$) et vérifier la coïncidence avec l'expression connue.

3. Et encore pour $F_4(n)$ (à exprimer en fonction de $(n + 1)^5, F_3(n), F_2(n), F_1(n)$ et $F_0(n)$).

4. Établir que : $\quad (n + 1)^{p+2} = 1 + \sum\limits_{k=0}^{p+1} \binom{p+2}{k} F_k(n)$.

En déduire l'expression de $F_{p+1}(n)$ en fonction de $F_0(n), \ldots, F_p(n)$ et $(n + 1)^{p+2}$.

Algèbre

Exercice 4

1. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)(X - 2)$.

2. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 1$.

3. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 5X^2 + 7X - 3$.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note par ailleurs $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

2. Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n I$.
Donner les relations de récurrence vérifiées par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

4. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

5. En déduire les coefficients de A^n.

6. Montrer que A est inversible. Déterminer une expression de A^{-1} en fonction de A et I.

7. Déterminer l'expression de A^{-n} en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à n.

b. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \big((X-\alpha)^k\big)_{k\in[\![0,n]\!]} = \big(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Expliciter les coordonnées de P relativement à la base $\mathcal{F}$.

e. Pour cette question uniquement, on suppose que $n = 4$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on note $\varphi(P)$ le vecteur de $\mathbb{R}^5$ égal à $(P(\alpha), P'(\alpha), P''(\alpha), P^{(3)}(\alpha), P^{(4)}(\alpha))$.
Prouver que $\varphi : P \longmapsto \varphi(P)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ vers $\mathbb{R}^5$.
Écrire la matrice de φ relativement à $\mathcal{F}$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^5$, puis la matrice de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_4[X]$ et de $\mathbb{R}^5$.

2. Soient $n+1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ et α_n deux à deux distincts. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on définit : $\quad P_k = \prod\limits_{i\in[\![0,n]\!]\setminus\{k\}} (X - \alpha_i)$.

a. Justifier que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\quad P_k \in \mathbb{R}_n[X]$.

b. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Justifier que pour tout $i \in [\![0,n]\!]\setminus\{k\}$, $\quad P_k(\alpha_i) = 0$ et que $P_k(\alpha_k) \underbrace{=}_{\text{noté}} \beta_k \neq 0$.

c. Montrer en utilisant la question précédente que la famille $\mathcal{G} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre puis qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Expliciter les coordonnées de P relativement à la base $\mathcal{G}$ (qu'on explicitera en fonction de $\beta_0, \dots, \beta_n$).

Analyse

Exercice 7

Soit $\beta \in [0,1]$. On définit la suite (u_n) par : $\quad u_n = \begin{cases} \beta & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{u_{n-1}}}{1+\mathrm{e}^{u_{n-1}}} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0,1]$.

2. Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que : $\quad \alpha = \frac{\mathrm{e}^\alpha}{1+\mathrm{e}^\alpha}$.

3. Montrer que : $\quad \forall x \in [0,1], \quad \left|\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \alpha\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4}\,|x-\alpha|$.

4. Établir que : : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4}\,|u_n - \alpha|$.

5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |\beta - \alpha|$.

6. Conclure quant à la convergence de (u_n).

Exercice 8

Pour tout entier naturel n on pose : $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner sous forme de fractions (la plus simple possible à chaque fois) les valeurs de u_0, u_1 et u_2, l'expression de u_n.

2. Déterminer les variations de (u_n).

3. Montrer que, pour tout $x > -1$ on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

4. En déduire que (u_n) est majorée.

5. Établir que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite ℓ.

Exercice 9

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1. On considère la fonction g définie par $g(t) = \frac{\sin t - t}{t^2}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$.

- **a.** Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_x^{2x} g(t)dt = 0$.
- **c.** En déduire que f est continue en 0.

2. Montrer que f est paire.

3. **a.** Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

- **b.** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.
- **c.** En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
- **d.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 10

1. Justifier la convergence et donner la somme des séries suivantes :

- **a.** $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n+1}{n!}$.
- **b.** $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n+1}{2^n}$.
- **c.** $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n^2+1}{2^{2n+1}}$.

2. Étudier la convergence des séries suivantes :

- **a.** $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.
- **b.** $\sum\limits_{n \geqslant 1} \sin \frac{1}{n^2}$.
- **c.** $\sum\limits_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$ (on pourra commencer par montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{n\ln n} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$)

Exercice 11

Soit f la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\,(t+1)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Étudier la fonction f : variations, limites aux bornes de l'ensemble de définition.

3. **a.** Montrer que pour tout $x > 0$: $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$.

- **b.** En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

4. Calculer $f(1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(n)$ et $f\left(n+\frac{1}{2}\right)$ en fonction de n.

5. En déduire la convergence des séries $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, et déterminer leur somme.

Probabilités

Exercice 12

On considère trois dés cubiques équilibrés dont les six faces sont numérotées comme suit :

- Dé 1 : 1, 5, 6, 13, 14 et 15 ;
- Dé 2 : 2, 7, 8, 9, 16 et 17 ;
- Dé 3 : 3, 4, 10, 11, 12 et 18.

Pour $i \in \{1,2,3\}$ on note X_i le résultat obtenu après un lancer du dé i.

1. Déterminer $\mathbb{E}(X_i)$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

2. Établir que les probabilités $\mathbb{P}(X_2 > X_1), \mathbb{P}(X_3 > X_2)$ et $\mathbb{P}(X_1 > X_3)$ sont toutes les trois strictement supérieures à $\frac{1}{2}$. On pourra utiliser la formule des probabilités totales.

Exercice 13

Dans cet exercice, tous les événements considérés sont définis dans un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
On note $\overline{M}$ l'événement contraire de M.

1. On considère trois événements A, B, C tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0, \mathbb{P}(B) \neq 1, \mathbb{P}(C) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$.

a. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B} \cap C\right)$$

b. En déduire alors la formule suivante : $\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}_{B\cap C}(A)\,\mathbb{P}_C(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}\cap C}(A)\,\mathbb{P}_C\left(\overline{B}\right)$

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce amenant $Pile$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$), et $Face$ avec la probabilité q, où $q = 1 - p$.
On admet que les résultats des différents lancers sont indépendants.
Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement : "on obtient $Face$ à l'issue du k-ième lancer".
$\overline{F_k}$ est donc l'événement : "on obtient $Pile$ à l'issue du k-ième lancer".
On considère l'événement E : "2 $Face$ consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 $Pile$ consécutifs".
Par exemple :

- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}F_5F_6$, alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont $\overline{F_1}F_2F_3\overline{F_4}\,\overline{F_5}F_6$, alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}\,\overline{F_5}F_6$,alors $\overline{E}$ est réalisé.

2. a. Donner sans calcul la valeur de $\mathbb{P}_{F_1\cap F_2}(E)$.

b. Justifier également sans calcul la relation suivante $\mathbb{P}_{F_1\cap\overline{F_2}}(E) = \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$.

c. En utilisant la relation trouvée à la question **1.b.**, avec $A = E, B = F_2$ et $C = F_1$, trouver une relation entre $\mathbb{P}_{F_1}(E)$ et $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$.

3. a. Que vaut $\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}}(E)$?

b. Montrer que $\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap F_2}(E) = \mathbb{P}_{F_1}(E)$.

c. Toujours en utilisant la relation de la question **1.**(b) appliquée à des événements bien choisis, montrer que $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = q\mathbb{P}_{F_1}(E)$.

4. a. Déduire des questions **2.** et **3.** les égalités

$$\mathbb{P}_{F_1}(E) = \frac{q}{1-pq} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = \frac{q^2}{1-pq}.$$

b. Calculer $\mathbb{P}(E)$ en fonction de p et de q.

5. On note G l'événement : " 2 $Pile$ consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 $Face$ consécutifs"

a. Expliquer comment trouver $\mathbb{P}(G)$ sans calcul.

b. Vérifier que $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = 1$. Comment interpréter ce dernier résultat ?

Exercice 14

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2. Vérifier que X admet une densité f_X continue. Étudier f_X.

3. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$, $P(X \geqslant 1)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant -1)$.

4. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) = \frac{9}{10}$

5. Calculer $\mathbb{P}(\exp(X) \leqslant 1)$.

6. Calculer $\mathbb{P}(X^2 \leqslant 1)$.