Devoir de vacances

pour le 04/09/2018

Au moins une dizaine de jours avant la rentrée ; remettez-vous progressivement au travail en retravaillant le cours de première année (soit des fiches réalisées en sup, soit à l'aide d'un livre dans le lequel il y a une partie résumant « l'essentiel du cours » pour chaque chapitre.) Ce devoir porte sur une grande partie du cours de première année. Comptez une dizaine d'heures au total à consacrer à ce DM. Ne perdez pas de temps avec un brouillon (juste pour rechercher les idées), soignez la rédaction et pensez à encadrer ou souligner vos résultats en rouge.
Bon courage !

Exercice 1- Étude d'une suite implicite

On désigne par n un entier naturel non nul et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx - e^{-x}$.

1. (a) Montrer que f_n établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
   (b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution unique notée u_n.
   (c) Montrer que $u_n \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$.
   (d) En déduire que $(u_n)_n$ converge.
2. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Déterminer les natures des séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n (u_n)^2$.
4. En utilisant la définition de u_{n+1} déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$.
   En déduire que $(u_n)_n$ est monotone.
5. (pour les 5/2) Déterminer que la série $\sum_n (-1)^n u_n$ converge :
   (a) En utilisant la question précédente.
   (b) En faisant un développement asymptotique de u_n.

Exercice 2- Espaces préhilbertiens

1. On considère $E = C^\infty([0,1], \mathbb{R})$.
   On définit : $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
   (a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
   (b) On note $F = \{f \in E, \forall t \in [0,1], f''(t) = 4f(t)\}$.
   Montrer que F est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension et une base.
   (c) Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $Id : t \mapsto t$ sur l'espace F.
   (d) Montrer que $\forall f \in E, \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}dt \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2}dt\right)^{1/2}$.
   Déterminer les cas d'égalité.
2. Soit $n \geq 2$, E un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1, ..., e_n)$, n vecteurs unitaires de E tels que pour tout $i \neq j$, $\|e_i - e_j\| = 1$.
   (a) Déterminer $(e_i|e_j), \forall (i,j) \in [[1, n]]^2$.
   (b) Déterminer le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(n)}$.
   On pourra additionner toutes les lignes.
   (c) En déduire que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E.

Exercice 3

Dans cet exercice N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où , au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents.
(On pourra appeler X_N le " nombre de changements " au cours des N premiers lancers).
Par exemple , si les 9 premiers lancers ont donné successivement :
Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile
alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, \cdots, N-1\}$.
2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
3. Déterminer la loi de X_3.
4. Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$.
5. (a) Justifier que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$: $P_{X_N=k}(X_{N+1} = k) = \dfrac{1}{2}$ (C'est à dire $P(X_{N+1} = k / X_N = k) = \dfrac{1}{2}$)
   (b) En déduire que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$:
   $$P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \frac{1}{2} P(X_N = k).$$
   (c) En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que : $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \dfrac{1}{2}$.
   (d) Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.
6. (a) Montrer grâce aux résultats 5(b) et 5(c) que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.
   (b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binômiale $B(N-1, \dfrac{1}{2})$. En déduire la variance $V(X_N)$.

Exercice 4- Pour les $5/2$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x, y pour que A et B soient semblables.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.
   Déterminer la probabilité pour que les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soient semblables.

Problème 1

On note E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications continues de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit 4 vecteurs de E, en posant :
$\forall x \geq 0, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2$.
$\forall x > 0, g_1(x) = xln(x), g_2(x) = x^2 ln(x)$ et $g_1(0) = 0, g_2(0) = 0$.
On pose $F = Vect(f_1, f_2, g_1, g_2)$.

On note φ l'application définie sur E par $\forall f \in E, \forall x \geq 0, \varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$.
On notera $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ la primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0.

1. Trouver en utilisant un changement de variables, que l'on prendra soin de justifier, une relation entre $\displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$ et $F(x)$ pour $x > 0$.
2. En déduire que $\forall f \in E, \varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
4. Montrer que $\forall f \in E, \varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. et trouver une équation différentielle vérifiée par $\varphi(f)$.

5. En déduire pour $f \in E$, la résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy' + y = f(x)$.
6. Vérifier que $B = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ est une base de F.
7. On notera encore φ la restriction de φ à F. Calculer $\varphi(f_1), \varphi(f_2), \varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$.
8. En déduire que φ est un endomorphisme de F.
9. Déterminer la matrice représentative A , de φ dans la base $B = (f_1, f_2, g_1, g_2)$.
10. Montrer que φ est bijective.
11. Donner la matrice de φ^{-1} dans la base B. (Les calculs doivent apparaître sur la copie)
12. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & a_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 & b_n \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$, où a_n et b_n sont des réels vérifiant une relation de récurrence que l'on déterminera.
13. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, 4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0.$$
En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
On admet que, par une méthode similaire, on peut obtenir $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \dfrac{-n}{3^{n+1}}$.

Problème 2

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^4$ tel que $u^2 = 0$.

1. Comparer Imu et $Keru$. En déduire que $rg(u) \leq 2$.
2. On suppose dans cette question que $rg(u) = 1$.
On considère un vecteur e_1 qui n'est pas dans $Keru$ et on pose $e_2 = u(e_1)$.
   (a) Vérifier que e_2 appartient à $Keru$ puis montrer que l'on peut trouver deux vecteurs e_3 et e_4 tels que (e_2, e_3, e_4) soit une base de $Keru$.
   (b) Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (c) Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que u est de rang égal à 2.

3. (a) Établir que $Keru = Imu$.
   (b) Soit (e_1, e_2) une base de $Keru$. Justifier qu'il existe deux vecteurs e_3 et e_4 tels que $e_1 = u(e_3)$ et $e_2 = u(e_4)$ et montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (c) Montrer que la matrice de u dans cette base est $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note :
$C(u) = \{v \in L(\mathbb{R}^4) | uov = vou\}$ et $P(u) = \{v \in L(\mathbb{R}^4) | \exists S \in \mathbb{R}[X], v = S(u)\}$.
On rappelle que si $S = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $S(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ où $u^0 = Id$.
   (a) Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $L(\mathbb{R}^4)$.
   En caractérisant la matrice d'un élément v de $C(u)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) , donner la dimension de $C(u)$.
   (b) Montrer que $P(u)$ est un sous-espace vectoriel de $L(\mathbb{R}^4)$ de dimension 2.
   (c) A-t-on $C(u) = P(u)$? Justifier.

Problème 3

On se propose d'étudier la marche aléatoire d'une particule se déplaçant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine O.
La particule est à l'origine au temps 0 et se déplace à chaque unité de temps d'une unité sur la droite (l'abscisse de la particule augmentant d'une unité) avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou d'une unité sur la gauche (l'abscisse de la particule diminuant d'une unité) avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On suppose que les déplacements de la particule sont indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ème}}$ déplacement a lieu vers la droite et qui vaut -1 si le $k^{\text{ème}}$ déplacement a lieu vers la gauche.
La suite $(X_k)_{k\geq 1}$ est donc une suite de variables aléatoires indépendantes dont la loi de probabilité est donnée par :

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \tfrac{1}{2}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n l'abscisse de la particule à l'instant n, on a donc en particulier $S_0 = 0$.
On suppose que toutes les variables aléatoires décrites précédemment sont définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P).

Questions préliminaires

1. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes :
   $\sum_n a_n$ diverge et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
   (a) Justifier que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_o, |a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n$.
   (b) En déduire que :$\forall n \geq n_o, \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n_o} |a_k - b_k| + \varepsilon \sum_{k=n_o+1}^{n} b_k$.
   (c) Montrer finalement que : $\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} b_k$.
2. On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
   En déduire un équivalent simple de $\binom{2n}{n}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Partie 1 : abscisse de la particule au temps n

1. Donner, pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, l'espérance $E(X_k)$ et la variance $V(X_k)$ de la variable aléatoire X_k.
2. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprimer S_n en fonction de certaines des variables X_k.
   (b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$.
3. (a) Vérifier que l'unique couple (a, b) de $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ tel que la variable aléatoire Y_k définie, pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, par $Y_k = aX_k + b$, suive la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, est le couple $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
   (b) En déduire la loi de S_n.
   (c) Montrer que, pour tout couple (n, m) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $S_{n+m} - S_n$ suit la même loi que S_m.
   (d) En déduire la covariance des variables aléatoires S_n et S_{n+m}. On pourra utiliser $V(S_m)$.
   Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Partie 2 : nombre moyen de retours à l'origine

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la particule est repassée à l'origine entre les instants 1 et $2n$ (1 et $2n$ compris).
On note O_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la particule est à l'origine à l'instant k, et 0 sinon.

1. Donner, selon la parité de k, la loi ainsi que l'espérance de la variable aléatoire O_k.
2. Exprimer Z_n en fonction de certaines des variables O_k et en déduire l'espérance de Z_n sous forme de somme.
3. (a) Montrer que : $\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{t}}$.
   (b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.
   (c) En déduire, en utilisant les résultats des questions préliminaires, que : $E(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

Bien commencer sa PC...

Voici une liste non exhaustive des bases à avoir assimilé avant la rentrée afin de démarrer l'année dans de bonnes conditions !

Généralités

- Savoir faire une récurrence
- Savoir raisonner par l'absurde ou par contraposée
- Savoir utiliser les quantificateurs
- Savoir reconnaitre des non-sens
- Être capable d'utiliser des définitions avec des quantificateurs (Exemples : limite de suite, famille libre, application surjective...)
- Savoir démontrer l'existence d'un objet par analyse-synthèse

Technique

- Être capable de dériver une composée de fonctions
- savoir manipuler les sommes et calculer des sommes de termes de suites géométriques ou arithmétiques
- Savoir exprimer à l'aide de la factorielle le produit d'entiers pairs ou le produit d'entiers impairs consécutifs.
- Savoir utiliser les quantificateurs
- Savoir utiliser les complexes (racines n-ième, sommes de cos ou de sin...)
- Savoir utiliser le cercle trigonométrique, connaitre les formules trigonométriques
- Savoir calculer un DL

Analyse

- Connaitre les fonctions usuelles et leur graphes
- Connaitre les théorèmes importants : bijection , TVI, TAF, Rolle, Formule de Taylor- Young...
- Savoir étudier la convergence d'une série
- Savoir faire une IPP, un changement de variable dans une intégrale
- Savoir étudier une suite (monotonie...) et travailler avec des suites classiques (arithmético-géométrique, récurrentes linéaires d'ordre 2...)

Algèbre

- Savoir démontrer la linéarité
- Savoir démontrer que l'on a un sev. Reconnaitre un Vect...
- Connaitre toutes les définitions (endomorphisme, somme de 2 sev, rang, noyau, image, base, dimension...)
- Savoir démontrer qu'une famille est une base avec différentes méthodes (libre+ card, rang, det ...)
- Savoir calculer un determinant (mat triangulaire, développement, transvection sur les lignes ou colonnes...) et savoir utiliser le déterminant
- Être capable d'écrire une matrice représentative, connaitre la formule de changement de base pour un endomorphisme $A' = P^{-1}AP$
- Savoir utiliser une matrice représentative pour déterminer le noyau, l'image d'une application linéaire

- Savoir calculer l'inverse d'une matrice de taille 3 avec la méthode du pivot
- Savoir démontrer que 2 sev sont supplémentaires
- Savoir manipuler les polynômes (coefficients, degré, racines, ordre de multiplicité, degré d'un produit, d'une somme...)
- Connaitre les définitions et les propriétés relatives aux projecteurs
- Savoir démontrer que l'on a un produit scalaire
- Connaitre l'expression d'un projeté orthogonal dans une b.o.n. Savoir calculer une distance.

Probabilités

- Connaitre les théorème importants (probabilités totales, F de Bayes, probabilités composées...)
- Être capable de déterminer un système complet d'événements.
- Savoir utiliser la notion d'indépendance.
- Être capable de reconnaitre une loi usuelle ou de déterminer une loi (y compris loi marginale à partir de loi conjointe)
- Savoir utiliser la formule de transfert
- Reconnaitre les cas d'équiprobabilité et savoir dénombrer (p combinaisons, arrangements, permutations...)

Informatique

- Installer Pyzo sur votre ordinateur (car il s'agit de l'interface utilisée par Centrale lors de l'oral)
- Être capable d'écrire une fonction simple, une boucle (pour calculer une somme par exemple...), un test...
- Être capable de fabriquer une liste et de manipuler ses éléments via l'indice. (savoir utiliser la méthode append)
- Comprendre le principe de discrétisation lié à la méthode d'Euler
- Savoir tracer une courbe simple en utilisant les bibliothèque numpy et matplotlib.pyplot
- Savoir écrire des requêtes SQL très simples