PC-PC*

Devoir de vacances

2016-2017 **Pour le 01/09/2016**

Au moins une dizaine de jours avant la rentrée ; remettez-vous progressivement au travail en retravaillant le cours de première année (soit des fiches réalisées en sup, soit à l'aide d'un livre dans le lequel il y a une partie résumant « l'essentiel du cours » pour chaque chapitre.)
Ce devoir porte sur une grande partie du cours de première année. Comptez une dizaine d'heures au total à consacrer à ce DM.
Ne perdez pas de temps avec un brouillon (juste pour rechercher les idées), soignez la rédaction et pensez à encadrer ou souligner vos résultats en rouge.
Bon courage!

Exercice 1:

A chaque journée de cours, Mademoiselle J. mange soit à la cantine de son lycée soit n'a pas le temps de manger en raison d'un temps d'attente trop long devant cette cantine. Précisément, quand le professeur lui permet de sortir de classe avant la sonnerie, elle parvient à manger avec probabilité 2/5. Lorsque le professeur lui impose de sortir à la sonnerie, elle n'a alors qu'une chance sur cinq de manger. Malgré son programme fort chargé, le professeur compatit au pauvre sort de Mademoiselle J. et la laisse donc sortir en avance avec probabilité 2/3. On suppose que, d'un jour à l'autre, les décisions du professeur de laisser ou non sortir Mademoiselle J. en avance sont indépendantes. On introduit les événements suivants :

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n : « Mademoiselle J. parvient à manger au n^e jour de cours ».

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n : « Le professeur laisse sortir Mademoiselle J. en avance au n^e jour de cours».

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « Mademoiselle elle n'a pas mangé deux fois de suite pour la première fois aux (n-1) et $n^è$ jours de cours » .

1°) Dans cette question, on considère un jour de cours $n \in \mathbb{N}^*$, quelconque.

a) Montrer que $P(M_n) = 1/3$.
b) On constate que Mademoiselle J. n'a pas mangé. Quelle est la probabilité que l'enseignant ne l'ait pas laissée sortir à l'avance ?

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = P(A_n)$.

a) Calculer u_1 et u_2.
b) A l'aide de la formule des probabilités totales en utilisant les évènements M_1, $\overline{M_1} \cap M_2$ et $\overline{M_1} \cap \overline{M_2}$ déterminer une relation de récurrence entre u_n , u_{n-1} et u_{n-2}.
c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

3°) Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que S_n représente la probabilité d'un certain événement, dont on donnera un libellé explicite.
b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite et interpréter le résultat.

Exercice 2:

On pose f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\, e^{\frac{1}{1-x}}$.

1°) Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$.

2°) Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

3°) Démontrer par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x < 1,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$.

Explicite la relation entre $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P'_n(X)$ et X.

4°) Préciser P_0 , P_1 , P_2 et P_3 .

5°) a) Vérifier que f est solution sur $]-\infty , 1[$ de l'équation (E) $(1-x)^2 y' = (2-x) y$.

b) En dérivant n fois la relation obtenue à l'aide de (E), montrer que :

$$P_{n+1}(X) = [(2n+1)X + X^2]\, P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X).$$

6°) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = f^{(n)}(0)$.

a) Exprimer a_n en fonction de P_n.

b) Déterminer l'expression du développement limité de f à l'ordre n, au voisinage de 0.

c) Déterminer, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1} .

d) Déduire du 1°) les valeurs de a_k $\forall k \in [[0 , 3]]$. En déduire a_4

e) Préciser le développement limité de f à l'ordre 4, au voisinage de 0.

Exercice 3:

On note $\mathbb{C}_n[X] = \{ P \in \mathbb{C}[X] , \deg(P) \leq n \}$.

1°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $T_k = X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$. On pose $T_0 = 1$.

Montrer que $B = (T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2°) Soit $\Delta : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ défini par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

b) Soit $k \geq 1$, calculer $\Delta(T_k)$ en fonction de T_{k-1} .

c) En déduire que $\Delta(\mathbb{C}_n[X]) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

d) En déduire le noyau de Δ . (On pourra montrer une inclusion et utiliser la dimension)

3°) a) En utilisant la question 2°)b), calculer $\forall (j , k) \in \mathbb{N}^2$, $\Delta^j(T_k)$ puis $\Delta^j(T_k)(0)$.

b) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, déduire du a) les coordonnées de P dans la base B en fonction des $\Delta^j(P)(0)$.

4°) <u>Application</u> :

a) On pose $P = X^3$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (T_0 , T_1 , T_2 , T_3).

b) A l'aide du 2°)b) , déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{C}_4[X]$ tel que $\Delta(Q) = P$ et $Q(0) = 0$

(On écrira Q sous une forme factorisée.)

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Déduire du b) la valeur de $\sum_{k=1}^{N} k^3$.

Exercice 4:

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq O_{n,n}$ et $A^3 + A = O_{n,n}$.

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1°) Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul et que $f^3 + f = O$.

2°) a)On suppose que f est injectif, montrer que $f^2 = -Id_E$ et trouver une contradiction.

b) Justifier le fait que $\dim(\operatorname{Ker} f) \in \{1 , 2\}$.

3°) Montrer que Ker (f) et Ker ($f^2 + Id_E$) sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Quelles sont alors les valeurs possibles de la dimension du sous espace vectoriel Ker ($f^2 + Id_E$) ?

4°) On pose F = Ker ($f^2 + Id_E$)

a) Vérifier que F est stable par f. On note g l'endomorphisme induit sur F.
b) Vérifier que $g^2 = - Id_F$. (on pourra vérifier que g est injectif)
c) En déduire que dim (F) = 2. (utiliser le déterminant)
d) Montrer qu'il existe e'_1 vecteur de F tel que $(e'_1, f(e'_1))$ base de F.

5°) En déduire qu'il existe une base B' de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice représentative de f dans B' est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5:

On considère la suite de fonctions $(y_n)_n$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad y_o(x) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad y_{n+1}(x) = \int_0^x e^{-t.y_n(t)} \quad dt \end{cases}$

1°) Démontrer que, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, y_n est une fonction positive, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

2°) a) Démontrer que si $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, alors $y_p \leq y_q \Rightarrow y_{p+1} \geq y_{q+1}$.

b) En déduire que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0$,

$y_{2.n}(x) \leq y_{2.n+2}(x)$, $y_{2.n+3}(x) \leq y_{2.n+1}(x)$ et $y_{2.n}(x) \leq y_{2.n+1}(x)$.

3°) a) Montrer que, pour tous réels a, b positifs, $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|$.

b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq 0$, $|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \int_0^x t.|y_n(t) - y_{n-1}(t)|.dt$.

4°) a) Démontrer qu'il existe une suite (a_n) de réels positifs et une suite (b_n) d'entiers naturels telles que :

$\forall x \geq 0$, $/y_{n+1}(x) - y_n(x)/ \leq a_n . x^{b_n}$.

b) On pose $\alpha_n = a_n . x^{b_n}$ Démontrer que $\exists$ N $\in \mathbb{N}$ tel que $\forall$ n $\geq$ N, $\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \leq ½ \quad \forall x > 0$.

En déduire que $(\alpha_n)_n$ converge vers 0.

c) Montrer que $\forall x \geq 0$, la suite $(y_n(x))_n$ converge. (On pourra utiliser des suites adjacentes).On note $y(x)$ sa limite.

5°) a) Montrer que, pour tous réels a, b positifs, $|y_n(a) - y_n(b)| \leq |a - b|$.

b) En déduire que y est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

6°) a) Démontrer que, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0$, $y_{2n}(x) \leq y(x) \leq y_{2n+1}(x)$.

b) En déduire que, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0$, $y_{2n+2}(x) \leq \int_0^x e^{-t.y(t)} dt \leq y_{2n+1}(x)$.

c) Montrer que $\forall x \geq 0$, $y.(x) = \int_0^x e^{-t.y(t)} dt$

Exercice 6:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n>0} u_n$ diverge.

1) Montrer que $\sum_{n>0} \frac{u_n}{1+n^2 u_n}$ converge.

2) On s'intéresse maintenant à la série $\sum_{n>0} \frac{u_n}{1+n\, u_n}$.

   a) Quelle est la nature de la série si $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$?

   b) On suppose que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = 2^m - 1 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$.

   Démontrer que $\sum_{n>0} \frac{u_n}{1+n\, u_n}$ converge.

Problème:

Dans tout le problème, n et p désignent deux entiers naturels non nuls tels que $p \geqslant 2$.

L'objet de ce problème est l'étude d'un marché, sur lequel n consommateurs $C_1, C_2, \ldots, C_n$ achètent successivement chacun un bien qu'ils peuvent se procurer de façon équiprobable auprès de p fournisseurs $F_1, F_2, \ldots, F_p$.

Première partie

Pour tout i de $[\![1\,;p]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de consommateurs ayant choisi le fournisseur F_i.

1. Soit $i \in [\![1\,;p]\!]$. Reconnaître la loi de X_i. Donner son espérance et sa variance.

2. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_p$ sont-elles indépendantes ?

3. Soient $i, j \in [\![1\,;p]\!]$ tels $i \neq j$.

   a. Reconnaître la loi de $X_i + X_j$.

   b. En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

4. On suppose dans cette question que $p = 2$. Calculer le coefficient de corrélation de (X_1, X_2). Ce résultat était-il prévisible ? Pourquoi ?

5. Soient $i, j \in [\![1\,;p]\!]$ tels $i \neq j$. Déterminer la loi du couple (X_i, X_j).

Deuxième partie

On définit la variable aléatoire Y égale au nombre de fournisseurs n'ayant eu aucun client après les commandes des n consommateurs.

On définit également, pour tout i de $[\![1\,;p]\!]$, B_i la variable aléatoire égale à 1 si le fournisseur F_i n'a eu aucun client et 0 sinon.

1. **a.** Justifier que Y prend ses valeurs dans $[\![\max(0, p-n)\,; p-1]\!]$.

   b. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(Y = p-1)$.

   c. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(Y = p-n)$ lorsque $n \leqslant p$.

2. **Espérance et variance de Y par une première méthode :**

   a. Pour tout i de $[\![1\,;p]\!]$, déterminer la loi de B_i, son espérance et sa variance.

   b. Pour tous i, j de $[\![1\,;p]\!]$ tels que $i \neq j$, calculer $\mathbf{P}\big((B_i = 1) \cap (B_j = 1)\big)$, puis en déduire $\mathbf{Cov}(B_i, B_j)$.

   c. Exprimer Y à l'aide des variables aléatoires $B_1, \ldots B_p$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

3. Espérance de Y par une deuxième méthode :

Pour tout k de $[\![1\,;n]\!]$, on définit la variable aléatoire Y_k égale au nombre de fournisseurs n'ayant eu aucun client après les commandes des k consommateurs $C_1, \ldots, C_k$, et la fonction G_k par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad G_k(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{P}(Y_k = i)\, x^i$.

a. Déterminer la loi de Y_1 et donner son espérance.

b. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Calculer $G_k(1)$. Que représente $G_k'(1)$ pour la variable aléatoire Y_k ?

c. Montrer, pour tout k de $[\![1\,;n-1]\!]$ et pour tout i de $[\![0\,;p-1]\!]$:

$$\mathbf{P}(Y_{k+1} = i) = \frac{p-i}{p}\,\mathbf{P}(Y_k = i) + \frac{i+1}{p}\,\mathbf{P}(Y_k = i+1)$$

d. En déduire, pour tout k de $[\![1\,;n-1]\!]$, la relation : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{k+1}(x) = G_k(x) + \dfrac{1-x}{p}\,G_k'(x)$, puis une relation entre $\mathbf{E}(Y_{k+1})$ et $\mathbf{E}(Y_k)$.

e. Retrouver l'expression de l'espérance de Y.

Troisième partie

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose dans cette partie que le nombre N de consommateurs est aléatoire et suit la loi de Poisson de paramètre λ.

On note toujours Y la variable aléatoire égale au nombre de fournisseurs n'ayant eu aucun client, et pour tout i de $[\![1\,;p]\!]$, B_i la variable aléatoire égale à 1 si le fournisseur F_i n'a eu aucun client et 0 sinon.

1. Soit $i \in [\![1\,;p]\!]$. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la probabilité $\mathbf{P}_{(N=n)}(B_i = 1)$. En déduire : $\quad \mathbf{P}(B_i = 1) = \mathrm{e}^{-\lambda/p}$.

2. Calculer, pour tout k de $[\![2\,;p]\!]$ et tout $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ de $\mathbb{N}^k$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant p$, la probabilité $\mathbf{P}\big((B_{i_1} = 1) \cap (B_{i_2} = 1) \cap \cdots \cap (B_{i_k} = 1)\big)$.

En déduire que les événements $(B_1 = 1), (B_2 = 1), \ldots, (B_p = 1)$ sont indépendants.

On admet que ceci implique que les variables aléatoires $B_1, B_2, \ldots, B_p$ sont indépendantes.

3. En déduire, sans calcul, la loi de Y.